装订线 答题时不要超过此线

中国科学技术大学数学科学学院
2023—2024学年第一学期期中考试试卷

■A 卷　　□B 卷

课程名称 几何学基础　　课程编号 MATH5011P

考试时间 2023年11月　　考试形式 闭卷

姓名________　学号________　学院________

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

一、**(20分)** 1. 举例说明$\mathbb{R}^3$中向量外积不满足结合律，即$(u\times v)\times w\neq u\times(v\times w)$。

2. 证明对于非零向量u,v,w，$(u\times v)\times w=u\times(v\times w)$当且仅当下面条件之一成立：

1. $u\perp v$且$v\perp w$；
2. $u\cdot v\neq 0$，且$w=\frac{v\cdot w}{u\cdot v}u$。

① 令 e_x, e_y, e_z 分别为笛卡尔坐标系 $Oxyz$ 的坐标单位向量，则

$(e_x\times e_x)\times e_y=0$ 但 $e_x\times(e_x\times e_y)=e_x\times e_z=-e_y\neq 0$.　　(10分)

② $(u\times v)\times w=(w\cdot u)v-(w\cdot v)u$

$u\times(v\times w)=(u\cdot w)v-(u\cdot v)w$

$\Rightarrow (u\times v)\times w-u\times(v\times w)=(u\cdot v)w-(w\cdot v)u$　　(5分)

$(u\cdot v)w=(w\cdot v)u \iff \begin{cases} u\perp v 且 v\perp w \\ u\cdot v\neq 0 且 w=\frac{v\cdot w}{u\cdot v}u \end{cases}$　　(5分)

二、**(20分)** 设$\mathbb{R}^3$中过点$(3,-2,2)$，$(1,1,1)$，$(0,5,-1)$的平面为S，求平面S的方程以及点$(5,4,6)$到平面S的距离。

平面方程 $2x+3y+5z=10$ (10分)

距离 $= \dfrac{|2\times5+3\times4+5\times6-10|}{\sqrt{2^2+3^2+5^2}} = \dfrac{42}{\sqrt{38}}$ (10分)

三、(20分) 给定直角坐标系$Oxyz$中，点P不在坐标平面上，从点P到Ozx平面，Oxy平面分别作垂线，垂足为M和N。设直线OP与平面OMN、Oxy、Oyz、Ozx所成的角分别为θ、α、β、γ，证明：

$$\frac{1}{\sin^2(\theta)} = \frac{1}{\sin^2(\alpha)} + \frac{1}{\sin^2(\beta)} + \frac{1}{\sin^2(\gamma)}.$$

设 $P=(x,y,z)$，则 $M=(x,0,z)$，$N=(x,y,0)$

平面 OMN 的法向量为 $\overrightarrow{OM}\times\overrightarrow{ON}=(-yz, xz, xy)$

于是

$$|\sin(\theta)| = |\cos\langle\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OM}\times\overrightarrow{ON}\rangle| = \frac{|\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OM}\times\overrightarrow{ON})|}{|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OM}\times\overrightarrow{ON}|} = \frac{|xyz|}{|\overrightarrow{OP}|\sqrt{y^2z^2+x^2z^2+x^2y^2}}$$

$$|\sin(\alpha)| = |\cos\langle\overrightarrow{OP}, e_3\rangle| = \frac{|z|}{|\overrightarrow{OP}|}$$

$$|\sin(\beta)| = |\cos\langle\overrightarrow{OP}, e_1\rangle| = \frac{|x|}{|\overrightarrow{OP}|}$$

$$|\sin(\gamma)| = |\cos\langle\overrightarrow{OP}, e_2\rangle| = \frac{|y|}{|\overrightarrow{OP}|}$$

综合上式得 $\dfrac{1}{\sin^2(\theta)} = \dfrac{1}{\sin^2(\alpha)} + \dfrac{1}{\sin^2(\beta)} + \dfrac{1}{\sin^2(\gamma)}$ $\square$

四、(15分) 1. 设$x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}^2$为不共线的三点。$T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$是一个满足$T(x_i)=x_i$，$i=1,2,3$的等距变换。求证：$T$是恒等变换（即$T(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}^2$）。

2. 设$\mathbb{R}^2$中三角形$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$全等。证明：存在唯一的等距变换将$\triangle ABC$变为$\triangle A'B'C'$。

1.(证1)：由于x_1,x_2,x_3不共线，$\overrightarrow{x_1x_2}$，$\overrightarrow{x_1x_3}$不共线.

引理(需证明!)：~~若向量$u,v\in\mathbb{R}^2$不共线，则~~

对任意点$x\in\mathbb{R}^2$，存在$\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ 使 $\overrightarrow{x_1x}=\lambda\overrightarrow{x_1x_2}+\mu\overrightarrow{x_1x_3}$.

由此，T等距且$T(x_1)=x_1$，故T线性，故

$$
\begin{aligned}
T(\overrightarrow{x_1x}) &= T(\lambda\overrightarrow{x_1x_2}+\mu\overrightarrow{x_1x_3})\\
&= \lambda T(\overrightarrow{x_1x_2})+\mu T(\overrightarrow{x_1x_3})\\
&= \lambda\overrightarrow{x_1x_2}+\mu\overrightarrow{x_1x_3} \quad (\text{由于 } T(x_2)=x_2,\ T(x_3)=x_3)\\
&= \overrightarrow{x_1x}\quad,\ \forall x\in\mathbb{R}^2
\end{aligned}
$$

故$T(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}^2$.

(证2) 引理：设$T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$等距且$T(p_1)=p_1$，$T(p_2)=p_2$，其中$p_1\neq p_2\in\mathbb{R}^2$.

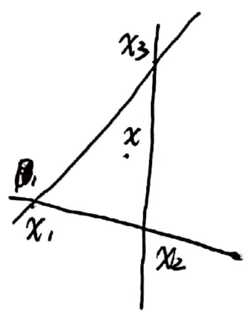
则对任意在直线p_1p_2上的点q，有$T(q)=q$.

证：取$\lambda\in\mathbb{R}$使得$\overrightarrow{oq}=\lambda\overrightarrow{op_1}+(1-\lambda)\overrightarrow{op_2}$. 则由于$T$仿射，有

$$
\begin{aligned}
T(\overrightarrow{oq}) = T(\lambda\overrightarrow{op_1}+(1-\lambda)\overrightarrow{op_2}) &= \lambda T(\overrightarrow{op_1})+(1-\lambda)T(\overrightarrow{op_2})\\
&= \lambda\overrightarrow{op_1}+(1-\lambda)\overrightarrow{op_2}\\
&= \overrightarrow{oq}
\end{aligned}
\qquad \square
$$

由引理T在直线$\overleftrightarrow{x_1x_2}$，$\overleftrightarrow{x_1x_3}$，$\overleftrightarrow{x_2x_3}$上均为恒等映射

对任意不在这三条直线上的点$x\in\mathbb{R}^2$，取直线l过x点，l至少与$\overleftrightarrow{x_1x_2}$，$\overleftrightarrow{x_1x_3}$，$\overleftrightarrow{x_2x_3}$中的两条有交点(设为$P,Q$)，则$T(P)=P$，$T(Q)=Q$，再由引理得$T$在$l=\overleftrightarrow{PQ}$上为恒等映射，特别的$T(x)=x$. $\square$



2. 存在性(略：先平移，再旋转(+反射))

唯一性：若$T_1,T_2:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$均满足条件，则$T_2^{-1}\circ T_1:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$将$A(B,C)$映成$A(B,C)$，故由题1知$T_2^{-1}\circ T_1=Id$，故$T_1=T_2$. $\square$

五、(15分) 设$\|-\|$是$\mathbb{R}^n$上的某个范数。设$E\subset\mathbb{R}^n$是一非空有界子集（即$\{\|\mathbf{x}\|\mid\mathbf{x}\in E\}$有上界）。固定非零向量$\mathbf{c}\in\mathbb{R}^n$。我们给出下述论断：存在一常数$\delta>0$，使得对任意$\mathbf{x},\mathbf{y}\in E$，均存在$\mathbf{x}',\mathbf{y}'\in E$使得$\|\mathbf{x}'-\mathbf{y}'+c\|\geq\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|+\delta$。

1. 当$n=2$且$\|-\|$由标准欧式内积诱导时，证明上述论断。
2. 对一般的n，假设$\|-\|$由某个内积诱导，请证明上述论断。
3. 上述论断对一般范数$\|-\|$是否正确？给出判断并说明理由（如正确给出证明，如错误给出反例）。

2. $\|x-y+c\|^2+\|y-x+c\|^2=2\|x-y\|^2+2\|c\|^2 \Longleftarrow \|\cdot\|$由内积诱导

$\Downarrow$

$\max\{\|x-y+c\|,\|y-x+c\|\}\geqslant\sqrt{\|x-y\|^2+\|c\|^2}\quad(\forall\, x,y\in E).$

令 $d=\sup\{\|x\|\mid x\in E\}<+\infty$. 则对任意 $x,y\in E$ 有 $\|x-y\|\leqslant\|x\|+\|y\|\leqslant 2d$.

$$\sqrt{\|x-y\|^2+\|c\|^2}-\|x-y\|=\frac{c^2}{\sqrt{\|x-y\|^2+\|c\|^2}+\|x-y\|}\geqslant\frac{c^2}{\sqrt{4d^2+c^2}+2d}\ (\triangleq\delta).$$

3 反例：① $\|(x_1,x_2)\|_1\triangleq|x_1|+|x_2|$， $E=\{(0,0),(1,1)\}$， $c=(-1,1)$

② $\|(x_1,x_2)\|_\infty\triangleq\max\{|x_1|,|x_2|\}$， $E=\{(0,0),(1,0)\}$， $c=(0,\frac{1}{2})$

六、(10+5分) 1.设$X \subset \mathbb{R}^2$是方程$\overset{F(x,y)}{\overbrace{ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f}}=0$定义的零点集。其中$a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}$且$abc \neq 0$。假设$X$非空也非单点集。证明：$X$存在有理参数方程当且仅当$X$不是两条直线的并。

注：所谓有理参数方程指不全为常值的有理函数(多项式的商)$\varphi(t), \psi(t)$ 使得$(\varphi(t), \psi(t)) \in X$对任意有定义的$t \in \mathbb{R}$成立。

2.附加题：证明方程$\underset{4}{\cancel{5}}z^2 = 3x^2 - 26xy + 16y^2$存在无穷多整数解。

1. 存在刚体变换 $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 使得 $F \circ T(x,y) = 0$ 为以下型式：

① $\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$，$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$　　参数方程：$x(t) = \alpha \dfrac{t^2-1}{t^2+1}$，$y(t) = \beta \dfrac{2t}{t^2+1}$，$t \in \mathbb{R}$

② $\dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$，$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$　　参数方程：$x(t) = \alpha \dfrac{t^2+1}{t^2-1}$，$y(t) = \beta \dfrac{2t}{t^2-1}$，$t \in \mathbb{R}$

③ $\{y = kx\} \cup \{y = -kx\}$，$0 < k \leq 1$

④ $y = kx^2$，$k > 0$.　　参数方程：$x(t) = t$，$y(t) = kt^2$，$t \in \mathbb{R}$.

⑤ $x^2 = 0$.　　参数方程：$x(t) = 0$，$y(t) = t$，$t \in \mathbb{R}$.

在类①,②,④,⑤中 $F \circ T \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = 0$. 故 $T\left(\cancel{x(t)}\; x(t), y(t)\right)$ 是X的参数方程.

设 $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 的矩阵表示为 $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，则

$$T(x(t), y(t)) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax(t) + by(t) \\ cx(t) + dy(t) \end{pmatrix}$$ 是有理函数向量，故

$T(x(t), y(t))$ 是①,②,④,⑤情形X的有理参数方程.

下证③情型不存在参数方程，不然 $\cancel{y=kx}$ $\{y = kx\} \cup \{y = -kx\}$ 存在有理参数方程 $x(t), y(t)$。由参数方程定义，存在无穷多t使得 $y(t) = kx(t)$.

故(由于 $y(t), x(t)$ 均为有理函数) $y(t) = kx(t)$，$\forall t \in \mathbb{R}$

同理 $y(t) = -kx(t)$，$\forall t \in \mathbb{R}$. 矛盾！故③不存在参数方程. □

2. 方程 $\equiv \left(2\frac{x}{z} - 5\frac{y}{z}\right)^2 - \left(\frac{x}{z} + 3\frac{y}{z}\right)^2 = \underset{}{\overset{4}{\cancel{5}}}$，利用参数化

扫描全能王 创建