装订线 答题时不要超过此线

中国科学技术大学数学科学学院

2023—2024学年第一学期期末考试试卷

■A 卷　　□B 卷

课程名称 几何学基础　　课程编号 MATH2002

考试时间 2024年1 月　　考试形式 闭卷

姓名________　　学号________　　学院________

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分	15	15	15	20	20	15	100

注：若在答题中使用线性代数结果，需给出证明，否则不得分。

一、**(15分)** 利用仿射变换将方程$x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx+x+y+z+c=0$化成无交叉项形式（$c\in\mathbb{R}$为常数），并按$c$分类判断曲面的类型。

原方程 $\Leftrightarrow (x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2+(x+y)+(y+z)+(z+x)+2c=0$

作仿射变换 $x'=x+y$, $y'=y+z$, $z'=z+x$ 得

$$x'^2+y'^2+z'^2+x'+y'+z'+2c=0.$$

10'

作仿射变换 $x_1=x'+\frac{1}{2}$, $y_1=y'+\frac{1}{2}$, $z_1=z'+\frac{1}{2}$ 得.

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2+2c-\frac{3}{4}=0.$$

故曲面为 $\begin{cases} \text{椭球面}, & c<\frac{3}{8} \\ \text{单点}, & c=\frac{3}{8} \\ \text{空集}, & c>\frac{3}{8} \end{cases}$

5'

二、(15分) 设$p_1 = [1,0,0], p_2 = [2,3,1], p_3 = [1,0,2]$为射影平面$\mathbb{RP}^2$中三个点。求三条射影直线$p_1p_2, p_2p_3, p_3p_1$的方程并求出所有保持这三条射影直线不动的射影变换。

设$[x, y, z]$为$\mathbb{RP}^2$的齐次坐标.

1) P_1P_2: $y-3z=0$

P_2P_3: $2x-y-z=0$

P_3P_1: $y=0$

9'

2) 变换T保直线P_1P_2. P_2P_3. P_3P_1不动 $\Leftrightarrow T(P_i)=P_i$, $i=1,2,3$.

设T由矩阵$A\in GL_3(\mathbb{R})$表示, 则

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad A\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}=\lambda_2\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix},\quad A\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}=\lambda_3\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\quad \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\neq 0.$$

令$P=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&3&0\\0&1&2\end{pmatrix}$, 则 $AP=PD$, 其中$D=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{pmatrix}$.

则$[A]$保直线 $\Leftrightarrow A=PDP^{-1}$

6'

2h

-1

~~-3~~

1-4h

三、(~~20~~ 15分) 设$f \in \mathbb{R}[x,y]$为二次多项式且$f(x,y)=0$有2个以上的解。设$F(x,y,z)$为$f(x,y)$的齐次化。求证：$f(x,y)=0$是一个圆当且仅当$F(x,y,z)=0$包含点$[1,\pm i,0]$。

($\Rightarrow$) 设$f=0$是圆，则 $f(x,y)=(x-a)^2+(y-b)^2-r^2$.

齐次化 $F(x,y,z)=(x-az)^2+(y-bz)^2-r^2z^2$

令$z=0$，则 $x^2+y^2=0$，由此知$[1,\pm i,0]$是$F(x,y,z)=0$的解.

5'

($\Leftarrow$) 因$F(x,y,z)$为齐次二次多项式，由$[1,\pm i,0]$为$F(x,y,z)=0$的解

得 $F(x,y,0)=ax^2+bxy+cy^2$ 在$(1,\pm i)$处取值为0,

$\Rightarrow b=0,\ a=c$

$\Rightarrow F(x,y,z)=ax^2+ay^2+zG(x,y,z)$，$G(x,y,z)$为一次齐次多项式.

$\Rightarrow f(x,y)=ax^2+ay^2+g(x,y)$，$g(x,y)$为一次多项式.

$\Rightarrow f(x,y)=0 \Leftrightarrow (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\gamma$

$\#\{f(x,y)=0\}>1 \Rightarrow \gamma>0 \Rightarrow f(x,y)=0$为圆. $\square$

10'

四、(~~15~~ 20分) 求证：对一个$\mathbb{RP}^1$上的非平凡射影变换$\varphi \neq \mathrm{Id}$，下列三个陈述等价：

1. $\varphi^2 = \mathrm{Id}$；
2. 存在两个相异的点$p, q \in \mathbb{RP}^1$满足$\varphi(p) = q$且$\varphi(q) = p$；
3. 设φ由矩阵$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$表示，则$a + d = 0$。

$(1 \Rightarrow 2)$ $\varphi \neq Id \Rightarrow \exists p \in \mathbb{RP}^1$ s.t $\varphi(p) \neq p$. 取 $q = \varphi(p)$, 则 $\varphi(q) = \varphi^2(p) = p$.

5'

$(2 \Rightarrow 1)$ 由结构定理, 存在射影变换 $\psi: \mathbb{RP}^1 \to \mathbb{RP}^1$ s.t. $\psi(p) = [1, 0]$,
$\psi(q) = [0, 1]$.

令变换 $\Phi = \psi \circ \varphi \circ \psi^{-1}$, 则 $\Phi([1,0]) = [0,1]$. $\Phi([0,1]) = [1,0]$.

2'on讨论

设Φ由$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$表示, 则 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mu\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda, \mu \neq 0$.

$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda, \mu \neq 0$ $\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \lambda\mu & 0 \\ 0 & \lambda\mu \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow \Phi^2 = Id \Rightarrow \varphi^2 = Id$.

10'

$(1 \Leftrightarrow 3)$ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ $(\lambda \neq 0)$ $(\equiv \varphi^2 = Id)$

$\Leftrightarrow a + d = 0$ 5' $\square$

(细节2)

五、(15分) 求证：$\mathbb{RP}^2$上任意射影变换均存在不动点。

设射影变换 $\varphi: \mathbb{RP}^2 \longrightarrow \mathbb{RP}^2$ 由矩阵 $A \in GL_3(\mathbb{R})$ 诱导.

$\varphi(p)=p$ 有解 $p\in\mathbb{RP}^2$ 等价于方程 $Ax=\lambda x$ 对某 $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 有非零解 $x\neq 0$. ($\mathbb{R}^3$)

$\iff \exists \lambda\neq 0$ s.t 方程 $(A-\lambda I_3)x=0$ 有非零解. ($I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$).

$\iff \exists \lambda\neq 0$ s.t 矩阵 $A-\lambda I_3$ 的三个行向量共面.（x可取该平面法向量）.

$\iff \exists \lambda\neq 0$ s.t $\det(A-\lambda I_3)=0$

由行列式展开知以λ为参数的函数 $f(\lambda)=\det(A-\lambda I_3)$ 为一三次多项式,
且首项系数为-1. 故 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} f(\lambda)=-\infty$, $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} f(\lambda)=+\infty$.

由介值定理知 $\exists \lambda_0\in\mathbb{R}$ s.t $f(\lambda_0)=0$

又 $A\in GL_3(\mathbb{R}) \Rightarrow f(0)=\det(A)\neq 0$, 故 $\lambda_0\neq 0$ □.

六、(10+5分) $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$为两个不共线的非零向量。令$\Gamma = \{nx_1 + mx_2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$为$\mathbb{R}^2$的子集。

1. 令$GL_2(\mathbb{R})$为$\mathbb{R}^2$上所有可逆线性变换构成的群。求证：$\{g \in GL_2(\mathbb{R}) \mid g(\Gamma) = \Gamma\}$是$GL_2(\mathbb{R})$的一个无限子群。

2. 现在将$\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$视为复平面，令$GL_1(\mathbb{C})$为$\mathbb{C}$上可逆复线性变换构成的群。求证：$\{g \in GL_1(\mathbb{C}) \mid g(\Gamma) = \Gamma\}$是$GL_1(\mathbb{C})$的一个有限子群。（提示：$\mathbb{C}$上的复线性变换均为$z \mapsto az$型，其中$a \in \mathbb{C}$是固定常数，$z \in \mathbb{C}$是变元）

验证子群：略. 4+4

1. 设 $x_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix}$. 令 $\Phi = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$. 则

$A(\Gamma) \subseteq \Gamma \Rightarrow \exists Z \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$ s.t $A\Phi = \Phi Z$

$A^{-1}(\Gamma) \subseteq \Gamma \Rightarrow \exists Z' \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$ s.t $A^{-1}\Phi = \Phi Z'$

$\Rightarrow A(\Gamma) = \Gamma \Rightarrow ZZ' = (\Phi^{-1}A\Phi)(\Phi^{-1}A^{-1}\Phi) = I_2$ & $Z'Z = I_2 \Rightarrow Z \in GL_2(\mathbb{Z})$. 3

反之对 $Z \in GL_2(\mathbb{Z})$, $A = \Phi Z \Phi^{-1}$ 满足 $A(\Gamma) = \Gamma$.

$\Rightarrow \{g \in GL_2(\mathbb{R}) \mid g(\Gamma) = \Gamma\} = \Phi GL_2(\mathbb{Z}) \Phi^{-1}$. 由于 $\underset{\begin{pmatrix} n & n+1 \\ n-1 & n \end{pmatrix}}{\underset{\psi}{GL_2(\mathbb{Z})}}$ 为无限群. 1) 得证.

2. 设 $\alpha \in \mathbb{C}^*$ s.t $\alpha\Gamma = \Gamma$. 取 Γ_0 是Γ中长度最小的非0向量构成之集. 则
2
$\alpha\Gamma_0 \subseteq \Gamma_0$. 由此知 $|\alpha| = 1$. 即 $\alpha = e^{i\theta}$ 表示旋转变换. 又 Γ_0是有限集

故满足 $e^{i\theta}\Gamma_0 \subseteq \Gamma_0$ 的 θ 只有有限个. 故 $\{g \in GL_1(\mathbb{C}) \mid g(\Gamma) = \Gamma\}$ 为有限群. $\square$

2