

中国科学技术大学2023年春  
复分析期中考试试卷

2023年4月22日

姓名: \_\_\_\_\_ 系别: \_\_\_\_\_ 学号: \_\_\_\_\_

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	总分
得分									
阅卷人									

1. (20分) 计算下列各题

(1)  $1^i$

(2)  $\int_{|z|=1} \bar{z}(z+1)dz$

(3)  $\int_{|z|=2} \frac{2z+1}{z(z-1)}dz$

(4)  $\int_{|z|=2} \frac{1}{(z^3-1)(z-3)^2}dz$

2. (15分) 设区域  $D$  上的全纯函数  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  满足  $u + v^2 = 1$ , 证明  $f$  为常值函数.

3. (10分) 设  $f$  为域  $D$  上的连续函数且恒不为零, 假设  $f^2$  在  $D$  上全纯, 证明  $f$  在  $D$  上全纯.

4. (15分) 用 Liouville 定理证明代数学基本定理.

5. (10分) 设  $D$  为单连通区域且  $0 \in D$ , 证明: 存在域  $D$  上的全纯函数  $f$ , 满足  $e^{f(z)} = z$ .

6. (10分) 设  $E \subset \mathbb{C}$  是连通集, 证明:  $\bar{E}$  是连通集.

7. (10分) 设  $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z - 1$ , 其中  $a_1, \cdots, a_{n-1}$  为实数. 如果  $P(z)$  的所有零点都不在单位圆盘  $\{z : |z| < 1\}$  中, 求  $P(1)$ .

8. (10分) 设  $u : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  为调和函数且满足对任意  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$u(z) \leq 2|\log |z|| + 1.$$

证明:  $u$  为常值函数.