复分析期末试卷

2023 年 6 月 29 日

注 1: 本试卷共八个大题, 满分 100 分.　　　注 2: $B(0,1)=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<1\}$.

一 (10 分) 考虑复平面上的亚纯函数

$$f(z)=\frac{1}{(z-2023)(z-2024)}.$$

分别给出 $f(z)$ 在 $\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<2023\}$ 和 $\{z\in\mathbb{C}\mid 2023<|z|<2024\}$ 上的 Laurent 展开.

二 (7 分) 计算方程 $z^7-5z^4+z^2-2=0$ 在 $B(0,1)$ 上的根的个数.

三 (8 分) 证明: $\forall\theta\in(0,2\pi)$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\theta)}{n}=-\log\Big(2\sin\Big(\frac{\theta}{2}\Big)\Big).$$

四 (20 分) 计算积分:

1. (5 分)

$$\int_{|z|=1}\frac{dz}{(z+2)(2z-1)}.$$

2. (7 分)

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos(t)}{t^2+a^2}\,dt,\quad a>0.$$

3. (8 分)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(\sin(x))^2}{x^2}\,dx.$$

五 (15 分) 考虑函数 $f(z)=1/\cos z$ 在 $z=0$ 处的 Taylor 展开:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}z^n.$$

1. (5 分) 求幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}z^n$$

的收敛半径.

2. (5 分) 计算 a_0,a_1,a_2,a_3,a_4.

3. (5 分) 证明: 对任意 $n\geq 0$, $a_n\in\mathbb{Z}$.

六 (15 分) 设 f 为 $B(0,1)$ 上的全纯函数, $f(0)=0$. 已知 $\mathrm{Re}f(z)\leq 1/2$, $\forall z\in B(0,1)$. 证明:

$$|f(z)|\leq\frac{|z|}{1-|z|},\quad\forall z\in B(0,1).$$

七 (15 分)

1. (10 分) 求一个将区域 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2, |z-1| > 1\}$ 共形地映为 $B(0,1)$ 的共形映射.

2. (5 分) 是否存在从 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$ 到 $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ 的双全纯映射？若存在请给出具体构造，若不存在请说明理由.

八 (10 分)

1. (2 分) 叙述最大模原理.

2. (8 分) 设 $D \subset \mathbb{C}$ 为有界区域, $f : D \to \mathbb{C}$ 全纯. 如果对任意收敛于 ∂D 的点列 $z_n \in D$, 都有

$$\varlimsup_{n\to\infty} |f(z_n)| \leq M.$$

证明: 对任意 $z \in D$,

$$|f(z)| \leq M.$$