

中国科学技术大学数学科学学院
2020~2021 学年第2 学期期中考试试卷

■ A卷 □ B卷

课程名称 近世代数 课程编号 001010
考试时间 2023年5月14日16:20-17:30 考试形式 闭卷
姓名 学号 学院

1. (10分) 设 G 是一个群, H 是 G 的子群, 请解释在 H 的左陪集集 $\{gH\}_{g \in G}$ 上定义乘法的障碍, 从而解释为什么定义商群需要正规性条件.
2. (20分) 设 G 是一个群, M, N 是 G 的正规子群.
 - (1) 证明: $M \cap N$ 是 G 的正规子群;
 - (2) 证明: 如果 $M \cap N = \{1\}$, 那么 M 和 N 中的元素相乘可交换.
3. (20分) 设 G 是15阶群.
 - (1) 那么 G 的Sylow 3-子群和5-子群是否正规? G 是否交换? 请说明理由.
 - (2) 构造一个具体的群同构 $\rho: \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \rightarrow \mathbb{Z}_{15}$ (不需要解释).
4. (20分) 以下在 \mathbb{Z}_n 上定义乘法运算 $\bar{i} \cdot \bar{j} = \overline{ij}$, 把 \mathbb{Z}_n 中在乘法运算下的可逆元集合记作 \mathbb{Z}_n^* , 已知 \mathbb{Z}_n^* 是一个群.
 - (1) 分类2024阶交换群, 列举初等因子和不变因子.
 - (2) 证明: \mathbb{Z}_{11}^* 是一个循环群.
 - (3) 判断 \mathbb{Z}_8^* 是否是循环群(说明理由).
 - (4) 计算阶数 $|\mathbb{Z}_{2024}^*|$, 并且判断 \mathbb{Z}_{2024}^* 是否是循环群(不需要解释).
5. (30分) (1) 在置换群 S_6 中把元素 $(354)[(123)(456)](345)$ 表示为不相交轮换的乘积, 将 (12345) 表示为3-轮换的乘积.
 - (2) S_6 有多少个5阶元? 有多少个Sylow 5-子群?
 - (3) 写出一个置换群 S_6 的Sylow 5-子群 P (写出生成元即可, 下同).
 - (4) 写出置换群 S_{10} 一个Sylow 5-子群.
 - (5) 记号如(3), $G = S_6$, 记 P 在 G 中的正规化子群为 $N_G(P)$, 计算阶数 $|N_G(P)|$, 并写出这个群的生成元.

(6) 设 $G = S_4$, 取 $a = (12), b = (234)$, 说明 $G = \langle a, b \rangle$, 列举 a, b 满足的部分生成关系用群表现的形式表达 G (需要解释为什么你认为这些关系足够).