中国科学技术大学
2022–2023学年第二学期期中考试

考试科目：近世代数　　　　　　　　　　　　得分＿

学生所在系＿　　　　　学号＿　　　　　姓名＿

注：论证需详细、充分，按步给分。约定：子环总包含单位元，环同态总保持单位元。

装订线 答题时请不要超过此线

考虑Gauss整数环$R = \mathbb{Z}[i]$及其子环$S = \{m + 2ni \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$。Gauss有理数域$K = \mathbb{Q}(i)$。

(1) 求不定方程$x^2 + y^2 = 325$的所有整数解。

(2) 在R中，计算$\gcd(9 + 2i, 15 - 20i)$。

(3) 判断并论证：$x^4 - 2 \in K[x]$的可约性。

(4) 请分类（=完全列出）商环$R/5R$的所有子环，分类其所有理想。这里，$5R$表示元素5在R中生成的主理想。

(5) 计算环$R/5R$的自同构群$\mathrm{Aut}(R/5R)$的阶数（即，元素个数）

(6) 计算商环$S/(3 + 2i)S$的阶数，判断其是否为域。

(7) 试判断商环$S/2S$、$\mathbb{Z}_4$以及$\mathbb{F}_2[y]/(y^2 + \bar{1})$这三者之间是否有环同构。

(8) 整环S是否为UFD（唯一因子分解整环）？

三、(30分) 考虑域$K=\mathbb{F}_2[y]/(y^3+y+\bar{1})$。记$u=\bar{y}$。于是，$K$中元素均形如$a+bu+cu^2$，其中$a,b,c\in\mathbb{F}_2$。自然视$\mathbb{F}_2$为$K$的子域。

(1) 将多项式$x^3+x^2+\bar{1}$在$K[x]$中进行不可约分解，给出论证。

(2) 在K中，计算$(u^4+\bar{1})^{-1}$。

(3) 请列出K的所有子环。

(4) 判断$K[x]/(x^2+(u+\bar{1})x+u^2)$是否为域？

(5) 考虑域$E=\mathbb{F}_2[z]/(z^3+z^2+\bar{1})$。试具体建立从$E$到$K$的环同构。

(6) 分别考虑从$\mathbb{Z}_8$到K，以及从K到$\mathbb{Z}_8$的（保单位的）环同态的个数。

三、（30分）考虑商域$F=\mathbb{Q}[y]/(y^2+y+1)$，记$u=\bar{y}$，自然视$\mathbb{Q}$为$F$的子域。

(1) 将x^3+x-1在$F[x]$上进行不可约分解。

(2) 计算F的自同构群$\mathrm{Aut}(F)$的阶。

(3) 将x^3+x^2+1在$F[x]$上进行不可约分解。

(4) 设$R\subseteq F$为子环，且$\mathbb{Q}\subseteq R$。试证明：$R=\mathbb{Q}$或$R=F$。

(5) 问：是否存在正整数n，使得$u^n=1_F$？

(6) 考虑$E=F[x]/(x^2+5)$。试问：E是否为域？求$\mathrm{Aut}(E)$的阶数。