2023年春季学期近世代数(H)期末考试

授课教师：陈小伍

2023年7月12日　14:30-16:30

一、（50分）考虑$K=\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3},i)$以及$E=K\cap\mathbb{R}$. 以下，维数均指$\mathbb{Q}$上的维数。

1、计算域E的维数，以及群$\mathrm{Aut}(E)$的阶，给出论证。

2、计算$\sqrt[4]{3}+i$关于域$\mathbb{Q}$的最小多项式。

3、考虑$F=Q(\sqrt{2},i)$。证明：多项式$x^4-3\in F[x]$不可约。

4、考虑x^4-3的根集$\mathfrak{X}=\{a=\sqrt[4]{3},b=\sqrt[4]{3}i,c=-\sqrt[4]{3},d=-\sqrt[4]{3}i\}$以及群作用$\mathrm{Aut}(K)\curvearrowright K$诱导的群同态$\rho:\mathrm{Aut}(K)\to S(\mathfrak{X})$. 计算并描述$\rho$的像。

5、分类K的全体维数为4的子域，给出论证。

二、（40分）考虑n元集合$\{1,\cdots,n\}$的对称群S_n.

1、证明：S_n可以由(12)和$(12\cdots n)$生成。

2、对$2,3,4$的任一排列a,b,c，定义S_4的子群$H_{(a,b,c)}=\langle(12),(1abc)\rangle$，试分类所有的排列$a,b,c$使得 $H_{(a,b,c)}=S_4$.

3、设子群$H\subseteq S_5$满足:$(12)\in H$且$5\big||H|$, 证明：$H=S_5$.

4、考虑多项式$f(x)=x^5-4x+2\in\mathbb{Q}[x]$. 证明Galois群$\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(f)\simeq S_5$.

三、（10分）将$\mathbb{Z}^3$中的元素写成行向量，考虑由$(4,-6,0)$和$(0,6,-4)$生成的子群H.

1、在同构意义下，计算商群$\mathbb{Z}^3/H$的扭(torsion)子群。

2、证明：不存在群同态$f:\mathbb{Z}^3\to\mathbb{Z}$使得恰好有$\mathrm{Ker}(f)=H$.