中国科学技术大学数学科学学院
2023–2024 学年第 1 学期期中考试试卷

课程名称： 代数学基础 **课程编号：** 001356

考试时间： 2023 年 11 月 25 号 **考试形式：** 闭卷

姓名： ________ **学号：** ________ **学院：** ________

<table>
<tr><td rowspan="2">题号</td><td rowspan="2">第一题 (30 分)</td><td rowspan="2">第二题 (30 分)</td><td colspan="4">第三题 (40 分)</td><td colspan="2">第四题 (附加题 10 分)</td><td rowspan="2">总分 (110 分)</td></tr>
<tr><td>3.1(10')</td><td>3.2(10')</td><td>3.3(10')</td><td>3.4(10')</td><td>4.1(5')</td><td>4.2(5')</td></tr>
<tr><td>得分</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

本试卷共 8 页、16 题 (含附加题)，全卷总分 110 分 (含附加题分值)，考试时间 120 分钟。若卷面成绩超过 100 分，则计算课程总评成绩时，期中成绩按满分 100 分处理。

注意事项：直接在试卷上答题，切勿写在草稿纸上。

一、填空题：本题 5 小题，共 30 分。

1.1. (6 分) 高斯整数环 $\mathbb{Z}[i]$ 的全体单位为 ________.

1.2. (6 分) 方程 $21x + 55y = 2$ 的全体整数解为 ________.

1.3. (6 分) 73^{3323}(十进制表示中) 的末两位数码为 ________.

1.4. (6 分) 整数 x 同时满足 $\gcd(x, 33) = 1$ 和 $9x \equiv -3 \mod 33$ 当且仅当 $x \equiv$ ____ mod ____.

1.5. (6 分) 整数 $2^3 \times 3^2 \times 5$ 的全体正因子的平方和为 ________.

二、判断题：本题 5 小题，共 30 分。判断下面的说法是否正确，并简要说明理由或者举出反例。

2.1. (6 分) 若 G 为群，$x, y \in G$, 则 $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$.

2.2. (6 分) 群 $\left((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^{\times}, \times\right)$ 和 μ_6 同构.

2.3. (6 分) 设 $\varphi\colon R \to S$ 为环同态。对于任意 $r \in R$, 若 $\varphi(r)$ 在 S 中可逆，则 r 在 R 中也可逆.

2.4. (6 分) S^1 的任意有限阶子群均为循环群.

2.5. (6 分) . 设 a, b, c 为三个正整数. 则群 $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/b\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/c\mathbb{Z}$ 为循环群当且仅当 $\gcd(a, b, c) = 1$.

三、解答及证明题：本题 4 小题共 40 分。本题需给出详细步骤，按步骤给分。

3.1. (10 分) 解同余方程组

$$\begin{cases} 25x \equiv 15 \mod 35 \\ x \equiv 4 \mod 11 \\ x \equiv 16 \mod 17 \end{cases}$$

3.2. (10 分) 请利用带余除法证明整数环 $\mathbb{Z}$ 为主理想整环.

3.3. (10 分) 设 H 和 N 均为群. 记 $\mathrm{Aut}(N)$ 为群 N 的自同构群. 设 $\varphi\colon H \to \mathrm{Aut}(N)$ 为群同态. 对于任意 $h \in H$, 记 φ_h 为 h 在 φ 下的像. 在笛卡尔积 $G = N \times H$ 上定义二元运算 "$\cdot$"

$$(n_1, h_1) \cdot (n_2, h_2) := (n_1 \varphi_{h_1}(n_2), h_1 h_2).$$

验证 $(G, \cdot)$ 构成群.

3.4. (10 分) 设 G 为有限群. 考虑 G 上所以复值函数组成的集合 $\mathbb{C}[G]=\{f\colon G\to\mathbb{C}\}$. 在集合 $\mathbb{C}[G]$ 上，按如下方式定义加法和乘法：($\forall f_1, f_2\in\mathbb{C}[G]$, $\forall x\in G$)

$$(f_1+f_2)(x):=f_1(x)+f_2(x),$$
$$(f_1\cdot f_2)(x):=\sum_{g\in G}f_1(g)f_2(g^{-1}x),$$

则 $(\mathbb{C}[G],+,\cdot)$ 构成环. 对于任意 $h\in G$, 定义 $f_h\in\mathbb{C}[G]$ 为

$$f_h(x)=\begin{cases}0, & 若 x\neq h;\\ 1, & 若 x=h.\end{cases}$$

请证明

(a) (5 分) $f_h\in\mathbb{C}[G]^\times$ 且 $G\to\mathbb{C}[G]^\times (h\mapsto f_h)$ 为群的单同态;

(b) (5 分) 若记 $e=\sum_{h\in G}\frac{1}{|G|}f_h$，则 e 为中心幂等元.(即, $e^2=e$ 且 e 与 $\mathbb{C}[G]$ 中任意元素可交换).

四、附加题。本题 2 小题，共 10 分。本题需给出详细步骤，按步骤给分, 仅能使用本课程学到的知识。

4.1. (5 分) 证明不存在六元域.

4.2. (5 分) 请写出最小的非交换群, 并确认其最小性.