一、设 X 的分布为

$$P(X=-1)=\theta,\quad P(X=k)=(1-\theta)^2\theta^k,\ k=0,1,2,\cdots,\quad \theta\in(0,1).$$

1. 求零无偏估计组成的集合.
2. 求证 θ 有无偏估计，但不存在 UMVU 估计. 因此不存在充分完全统计量.
3. 求 $g(\theta)=(1-\theta)^2$ 的 UMVU 估计. (24′)

二. 设 X 的分布为 $f_\theta(x)=e^{-(x-\theta)}I_{(x>\theta)}$. 对假设检验问题

$H_0:\theta=0 \longleftrightarrow H_1:\theta>0$. 求水平为 α 的 UMP 检验. (18′)

三. 设 X 的分布为 $f_\theta(x)=3\theta^3\frac{1}{(x+\theta)^4}I_{(x>0)}$, $\theta>0$.

(1) 设 T_n 为 MLE. 求证: $\sqrt{n}(T_n-\theta)\rightsquigarrow N(0,\frac{5}{3}\theta^2)$.

(2) 令 $P_\theta(X_1>1)=\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^3\triangleq g(\theta)$. 其 MLE 为 $g(T_n)$. 求 $\sqrt{n}[g(T_n)-g(\theta)]$ 的极限分布. (18′)

四. 设 $A_n=(a_{n1},\cdots,a_{nn})$, $\sum_{i=1}^n a_{ni}^2=1$, $\sum_{i=1}^n a_{ni}=0$. 求证:

"A_n 满足条件 N" 的充要条件是 $\max_{1\le i\le n} a_{ni}^2=o(1)$. (20′)

五. 设 Bayes 模型 $X_i|\theta\sim N(\theta,\sigma^2)$, i.i.d., σ^2 已知, $\theta|\tau^2\sim N(0,\tau^2)$.
$\bar{X}=\frac{1}{n}(X_1+\cdots+X_n)$.

(1) 求后验分布 $\pi(\theta|X)$.

(2) 求 θ 的经验 Bayes 估计. (20′).