2023 秋季学期高等实分析期中试卷

授课老师: 李俊钢

整理人: 黄天一

更新：2023 年 11 月 7 日

注: 本份试卷是根据考后回忆整理而成, 可能有部分叙述有出入.

1. 叙述 $\mathbb{R}^n$ 上 d 维 Hausdorff 测度的构造过程, 并求出 $[0,1]$ 区间上 Cantor 三分集的 Hausdorff 维数及对应的 Hausdorff 测度.

2. 设 $(X,\mathcal{M},\mu)$ 为有限测度空间, $(X,\overline{\mathcal{M}},\bar{\mu})$ 为其完备化, $f:X\to\mathbb{R}$ 为有界函数. 证明:

(1) f 是 $\overline{\mathcal{M}}$-可测函数.

(2) $f\in L^1(\bar{\mu})$ 当且仅当存在 $\mathcal{M}$-可测的简单函数列 $\{\phi_n\}$ 和 $\{\psi_n\}$, 使得 $\phi_n\leqslant f\leqslant\psi_n$ 且 $\int(\psi_n-\phi_n)d\mu<n^{-1}$.

3. 设 $(X,\mathcal{M})$, $(Y,\mathcal{N})$ 是两个可测空间, μ 是 $(X,\mathcal{M})$ 上的有限符号测度, $F:(X,\mathcal{M})\to(Y,\mathcal{N})$ 是可测映射, 定义:

$$(F_*\mu)(B):=\mu(F^{-1}(B)),\ \forall B\in\mathcal{N}.$$

(1) 证明: $F_*\mu$ 是 $(Y,\mathcal{N})$ 上的有限符号测度.

(2) 设 $f:Y\to\mathbb{R}$ 为可测函数, 且 $f\circ F$ 可积. 证明:

$$\int f\,\mathrm{d}F_*\mu=\int f\circ F\,\mathrm{d}\mu.$$

4. 设 $(X,\mathcal{M},\mu)$ 和 $(Y,\mathcal{N},\nu)$ 为任意两个测度空间 (不一定 σ 有限). 证明:

(1) 如果 $f:X\to\mathbb{C}$ 是 $\mathcal{M}$-可测的, $g:Y\to\mathbb{C}$ 是 $\mathcal{N}$-可测的, 那么 $h(x,y)=f(x)g(y)$ 是 $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$-可测的.

(2) 如果 $f\in L^1(\mu)$ 且 $g\in L^1(\nu)$, 那么 (1) 中的 h 满足 $h\in L^1(\mu\times\nu)$ 且 $\int h\,\mathrm{d}(\mu\times\nu)=\int f\,\mathrm{d}\mu\int g\,\mathrm{d}\nu$.

5. 设 $\mu_j,\nu_j(j=1,2)$ 为 $(X_j,\mathcal{M}_j)$ 上的 σ 有限测度, 满足 $\nu_j\ll\mu_j$. 证明: $\nu_1\times\nu_2\ll\mu_1\times\mu_2$ 且

$$\frac{\mathrm{d}(\nu_1\times\nu_2)}{\mathrm{d}(\mu_1\times\mu_2)}(x_1,x_2)=\frac{\mathrm{d}\nu_1}{\mathrm{d}\mu_1}(x_1)\frac{\mathrm{d}\nu_2}{\mathrm{d}\mu_2}(x_2).$$

6. 设 $B_1(0)\subset\mathbb{R}^n$ 为单位开球, 考虑边值问题

$$\begin{cases}\Delta u=0, & x\in B_1(0),\\ u=f, & x\in\partial B_1(0).\end{cases}$$

(1) 证明: 存在 $\partial B_1(0)$ 上的正测度 ν^*, 使得

$$u(x)=\int_{\partial B_1(0)}f(y)\,\mathrm{d}\nu^*(y).$$

(2) 设 $\mathcal{H}^{n-1}$ 为 $n-1$ 维 Hausdorff 测度, 讨论在 $\partial B_1(0)$ 上是否成立 $\nu^* \ll \mathcal{H}^{n-1}$.