2023 年中国科学技术大学新生入学考试

数学试卷

院系__________ 姓名__________ 学号______________ 总分__________

说明：试卷满分 100 分，考试时间 120 分钟．禁止使用手机、计算器等电子设备．

一、填空题（每空 5 分，共 40 分．结果须化简，写在答题纸上．）

1. 设 i 是虚数单位．集合 $\{x \in \mathbb{R} \mid |x-1|+|x-\mathrm{i}|=2\}=$ __①__．

2. 在双曲线 $y=\dfrac{2x}{x+1}$ 的两个焦点中，距离 $(0,0)$ 最近的焦点的坐标是__②__．

3. 设 $S=\{1,2,3,4,5\}$．满足 $f(x)=f(f(x))$ 的映射 $f: S \to S$ 的数目是__③__．

4. 设函数 $y=f(x)$ 和 $y=x^3$ 的图像关于直线 $x+y=1$ 对称，则 $f(x)=$ __④__．

5. 设随机变量 X 服从二项分布 $B(10,\ 0.1)$，则 X^3 的数学期望 $E(X^3)=$ __⑤__．

6. 设五边形的顶点都在平面区域 $\{(x,y) \mid x^2+2y^2 \leqslant 1$ 且 $y \geqslant 0\}$ 中．此五边形的面积的最大值是__⑥__．

7. 把边长 3×4 的矩形 $ABCD$ 沿对角线 BD 折成 $60°$ 的二面角．设 θ 是异面直线 AC 与 BD 的夹角，则 $\tan\theta=$ __⑦__．

8. 设 O_1, O_2 分别是圆柱 P 的上、下底面 π_1, π_2 的中心，Q_i 是以 O_i 为顶点、π_{3-i} 为底面的圆锥体．若 P 的体积是 1，则 Q_1, Q_2 的公共部分的体积是__⑧__．

二、解答题（每题 20 分，共 60 分．须写出必要的计算和证明过程．）

9. 在平面直角坐标系中，$A=(1,0)$，过圆 $C: x^2+y^2=4$ 上动点 P 作直线 $L \perp PA$．求 L 扫过的圆 C 内部区域的面积．

10. 设 $a_n=4^{-n}C_{2n}^{n}$，其中 $n \in \mathbb{N}$，C_{2n}^{n} 是组合数．求证：
(i) 数列 $\{a_n\}$ 单调递减．(ii) 对于任意正实数 ε，存在正整数 n，使得 $a_n<\varepsilon$．

11. 求证：对于任意正整数 n 和实数 $x_1, \cdots, x_n$，$\sum\limits_{i,j=1}^{n}|x_i+x_j| \geqslant \sum\limits_{i,j=1}^{n}|x_i-x_j|$ 恒成立．

参考答案和评分标准

① $\{0,\frac{4}{3}\}$ ② $(1,0)$ ③ 196 ④ $1+\sqrt[3]{x-1}$ ⑤ 4.42 ⑥ 1 ⑦ $\frac{12}{7}$ ⑧ $\cancel{\frac{7}{12}}$ $\frac{1}{12}$

9. 设 $P=(2\cos\theta,2\sin\theta)$，则 $L: y=\dfrac{1-2\cos\theta}{2\sin\theta}(x-2\cos\theta)+2\sin\theta$. (6 分)

化简得 $(x+1)\cos\theta+y\sin\theta=\frac{x}{2}+2$.

故 $(x+1)^2+y^2\geqslant(\frac{x}{2}+2)^2$，并且等号可取到. (8 分)

L 扫过的圆内区域 $\Sigma=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4 \text{ 且 } \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}\geqslant 1\}$，

其面积 $=(4-2\sqrt{3})\pi$. (6 分)

10. (i) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{2n+1}{2n+2}<1$. 故 $\{a_n\}$ 单调递减. (5 分)

(ii) 熟知 $e^x\geqslant 1+x$ 对 $x\in\mathbb{R}$ 恒成立. (5 分)

故 $a_n=\prod\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2k-1}{2k}\leqslant\prod\limits_{k=1}^{n}e^{-\frac{1}{2k}}=e^{-\frac{1}{2}S_n}$，其中 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$. (5 分)

设 $n=2^m$，$m\in\mathbb{N}$，则 $S_n\geqslant 1+\sum\limits_{k=1}^{m}\dfrac{2^{k-1}}{2^k}=1+\dfrac{m}{2}$. 当 $m>4|\ln\varepsilon|$ 时，$a_n<\varepsilon$. (5 分)

11. 对 n 归纳证明 $f(x_1,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i,j=1}^{n}\Big(|x_i+x_j|-|x_i-x_j|\Big)\geqslant 0$ 恒成立.

不妨设 $|x_1|\leqslant\cdots\leqslant|x_n|$. 当 $n=1$ 时，结论显然成立. 当 $n\geqslant 2$ 时，

$f(x_1,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i,j=1}^{n}2\min(|x_i|,|x_j|)\operatorname{sgn}(x_ix_j)$，其中 $\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$. (6 分)

若 $x_1=0$，则 $f(x_1,\cdots,x_n)=f(x_2,\cdots,x_n)$. 根据归纳假设，结论成立. (2 分)

若 $x_1\neq 0$，令 $y_i=\begin{cases}x_i+x_1, & x_ix_1<0\\ x_i-x_1, & x_ix_1>0\end{cases}$，得 $y_1=0$，$x_iy_i\geqslant 0$，$|x_i|=|y_i|+|x_1|$. (4 分)

则 $f(x_1,\cdots,x_n)=f(y_1,\cdots,y_n)+2|x_1|\sum\limits_{i,j=1}^{n}\operatorname{sgn}(x_ix_j)=f(y_2,\cdots,y_n)+2|x_1|(p-q)^2$，

其中 p,q 分别是 $x_1,\cdots,x_n$ 中的正数和负数个数. (6 分)

根据归纳假设，$f(x_1,\cdots,x_n)\geqslant 0$. (2 分)

笔者注

入学考试第10题

设$a_n = 4^{-n}C_{2n}^n$, 证明: 对任意$\varepsilon > 0$，存在正整数n，使得$a_n < \varepsilon$. (实际上是证明$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$)

证明：直接计算可得

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 4 \cdot \frac{\frac{(2n)!}{n!n!}}{\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}} = \cdot \frac{(n+1)^2}{(n+\frac{1}{2})(n+1)} = \frac{n+1}{n+\frac{1}{2}} \geq \sqrt{\frac{n+2}{n+1}}$$

左右两边对n求乘积可得: $a_n \leq a_1 \cdot \sqrt{\frac{2}{n+2}} \to 0 \text{ as } n \to +\infty.$

入学考试第11题

证明：对任意正整数n和任意实数$x_1 \cdots, x_n$, 有如下不等式成立:

$$\sum_{i,j=1}^{n} |x_i + x_j| \geq \sum_{i,j=1}^{n} |x_i - x_j|.$$

证明1：注意到，对实数a有

$$|a| = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos(at)}{t^2} dt.$$

因此，

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1}^{n} |x_i + x_j| - |x_i - x_j| \\
=&\sum_{i,j=1}^{n} \frac{2}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \frac{\cos((x_i - x_j)t) - \cos((x_i + x_j)t)}{t^2} dt \\
=&\frac{4}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\sin(x_i t)\sin(x_j t)}{t^2} dt \\
=&\frac{4}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} \sin(x_i t)\right)^2}{t^2} dt \geq 0.
\end{aligned}$$

此题的背景是：设X, Y是独立、同分布、期望有限的随机变量，则

$$\mathbb{E}[|X+Y|] \geq \mathbb{E}[|X-Y|].$$

此题的不等式，对应的是X, Y服从$\{x_1 \cdots, x_n\}$上的均匀分布。因此上述不等式取等号，当且仅当$\forall t$, $\mathbb{E}[\sin(tX)] = 0$, 即X的特征函数$\varphi(t) := \mathbb{E}[e^{itX}]$为实值，这对应着$X$与$-X$同分布.

上面用到的积分引理可以作变量替换$s = at$之后用对称性证明。

那么，如何不利用那个积分恒等式证明呢？实际上只需要用到数学期望的积分表示（实际上是实分析里面积分的分布函数表示的一个变种）

今假设X, Y是独立、同分布、期望有限的随机变量，服从$\{x_1 \cdots, x_n\}$上的均匀分布，令$f(x,y) = |x+y| - |x-y|$。根据数学期望公式有:对随机变量Z, 成立

$$\mathbb{E}[Z] = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(Z \geq a) - \mathbb{P}(Z \leq -a)\, da.$$

现在只需考虑：对给定的$a > 0$, 何时$f(X,Y) \geq a$, 何时$f(X,Y) \leq -a$. 这可以通过画图或者解不等式直接完成。最后得到的结果应为

$$\mathbb{P}(f(X,Y)\geq a)=\mathbb{P}(X\geq\frac{a}{2})\mathbb{P}(Y\geq\frac{a}{2})+\mathbb{P}(X\leq-\frac{a}{2})\mathbb{P}(Y\leq-\frac{a}{2})=\mathbb{P}(X\geq\frac{a}{2})^2+\mathbb{P}(X\leq-\frac{a}{2})^2$$
$$\mathbb{P}(f(X,Y)\leq -a)=\mathbb{P}(X\geq\frac{a}{2})\mathbb{P}(Y\leq-\frac{a}{2})+\mathbb{P}(X\leq-\frac{a}{2})\mathbb{P}(Y\geq\frac{a}{2})=2\mathbb{P}(X\geq\frac{a}{2})\mathbb{P}(X\leq-\frac{a}{2})$$

所以被积函数

$$\mathbb{P}(f(X,Y)\geq a)-\mathbb{P}(f(X,Y)\leq -a)=\left(\mathbb{P}(X\geq\frac{a}{2})-\mathbb{P}(X\leq-\frac{a}{2})\right)^2\geq 0.$$

同样可以看出，取等条件即为：对任意$a>0$，有$\mathbb{P}(X\geq\frac{a}{2})=\mathbb{P}(X\leq-\frac{a}{2})$，即$X$和$-X$同分布.