2023随机过程期中（Note：原文为英文）

一. $EX^2<\infty$，$\mathcal{A}=\{Y: Y$是$\mathcal{F}$可测，且$EY^2<\infty\}$，$\mathcal{F}$为σ域；求证

$$E[(X-E[X|\mathcal{F}])^2]=\inf_{Y\in\mathcal{A}} E[(X-Y)^2].$$ (10′)

二. 设$\{X_n\}$平方可积，$\{S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k\}$是关于$\mathcal{F}_n$的鞅，求证$E[S_n^2]=E[\sum_{k=0}^{n}X_k^2]$。(15′)

三. 设$\{X_n\}$，$\{Y_n\}$是关于$\mathcal{F}_n$的上鞅，T为停时，满足条件$X_T\geq Y_T$，求证

$X_n I_{\{n<T\}}+Y_n I_{\{n\geq T\}}$，$n\geq 0$，求证$Z_n$也是上鞅。 (15′)

四. 对称随机游走：$P(X_n=1)=P(X_n=-1)=\frac{1}{2}$，$T=\min\{n: S_n=a$或$S_n=-a\}$，

$S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$，$S_0=0$；$\mathcal{F}_0=\{\Omega,\phi\}$，$\mathcal{F}_n=\sigma(X_1,\cdots,X_n)$，$n\geq 1$.

(i) 证明$\{S_n^2-n\}$是鞅.

(ii) 求ET.

(iii) 求常数b，c使得$Z_n=S_n^4-6nS_n^2+bn^2+cn$是鞅.（提示：可能用到

$Z_{n+1}=Z_n+4S_n^3X_{n+1}+6S_n^2X_{n+1}^2+4S_nX_{n+1}^3+X_{n+1}^4-6S_n^2-6(n+1)X_{n+1}^2-$

$12(n+1)S_nX_{n+1}+2nb+b+c$）

(iv) 若$ET^2<\infty$，求ET^2. (20′)

五. 设$\{X_n\}$是马氏链，~~对称~~转移矩阵$p(x,y)$，令$f(y)$为有界函数，且满足

$f(x)\leq\sum_{y}p(x,y)f(y)$，$x\in S$，求证在$P_\mu$下，$\{f(X_n)\}_{n\geq 0}$是关于$\mathcal{F}_n=\sigma(X_1,\cdots,X_n)$

的下鞅，其中μ是X_0的分布. (10′)

六. 设$\{X_n\}$为马氏链. $T_y^0=0$, $T_y^k=\inf\{m>T_y^{k-1}: X_m=y\}$, $k\geq 1$.

$p^n(x,y)=P_x(X_n=y)$. 求证:

(i) $\forall n\geq 1$, $\rho_{xy}\geq p^n(x,z)\rho_{zy}$. (ii) $\rho_{xy}\geq \rho_{xz}\rho_{zy}$. (15')

七. 设S是马氏链. $A\subset S$, $T_A=\min\{n: X_n\in A\}$, $g(x)=E_xT_A$. 求证:

$g(x)=1+\sum_{y\in S}p(x,y)g(y)$, $\forall x\notin A$. (15')