(原文为英文)

一、(15') 设$\{N_t\}$为强度为λ的泊松过程，T_k是事件第k次发生的时刻.

(1) 求$P(T_1\le t)$；(2) 对给定$t>0$，$0<t_1<t_2\le t$，求$P(T_1\le t_1, T_2\le t_2 \mid N_t=2)$.

二、(20') 设$\{B_t\}$为布朗运动，$B_0=0$. 求证：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sup_{t\in[n,n+1]} B_t}{n}=0$ a.s.

(提示：可能用到事实S_t与$|B_t|$同分布，其中$S_t=\sup\limits_{0\le s\le t} B_s$.)

三、(10') 设$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$为一个概率空间；$S, T$是两个停时.

(1) 求证若$S\le T$，则$\mathcal{F}_S\subset\mathcal{F}_T$；(2) 求证$\mathcal{F}_{S\wedge T}=\mathcal{F}_S\cap\mathcal{F}_T$.

四、(15') 设(X_t)为一个具有右连续路径的非负上鞅. 求证$\exists X_\infty\in L^1$

s.t. $X_t\to X_\infty$ a.s.，并且$E[X_\infty\mid\mathcal{F}_t]\le X_t$.

五、(20') 设$\{B_t\}$为布朗运动，$B_0=0$. 设停时$T=\inf\{B_t\ge 1-2t, t\ge 0\}$.

(1) 求证$T<+\infty$ a.s.；(2) 求$E[e^{-\lambda T}]$.

这句似是废话

六、(20') 设(X_t^x)为Markov过程，$(Q_t)_{t\ge0}$为Feller半群，预解式为R_λ.

这里不太记得是过强还是过弱，请自行判断

生成子(generator)为L. $X_0^x=x$. $v, h\in C_0(E)$. 求证$M_t^x=$

$e^{-\int_0^t v(X_s^x)dx}h(X_t^x)$是鞅，因此$h\in D(L)$，并且$\forall y\in E$，$Lh(y)=v(y)h(y)$.