中科大 2023 春博资考
代数

1、令 R, S 为含幺环。

(1) 证明：$\mathrm{M}_n(R\times S)\simeq \mathrm{M}_n(R)\times \mathrm{M}_n(S)$；

(2) 若 R 为局部环，m 为 R 极大理想。若 $y\in \mathrm{m}$，证明 $1+y$ 可逆；

(3) 若 R, S 为局部环，则 $R\simeq S$ 当且仅当 $\mathrm{M}_n(R)\simeq \mathrm{M}_n(S)$。

2、令 $q=p^r$，p 为素数。$\mathbb{F}_q$ 为 q 阶有限域。

(1) 给出 $SL_n(\mathbb{F}_q)$ 的阶；

(2) 给出 $SL_n(\mathbb{F}_q)$ 的一个 sylow p-子群；

(3) 若群 G 的阶为 p 的方幂。令 ρ： $G\to GL_n(\mathbb{F}_q)$ 的群同态。证明：$\mathrm{Im}(G)$ 可以同时相似上三角矩阵。

3、令 $\Gamma(N)=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbb{Z}):\ a-1\equiv d-1\equiv b\equiv c\equiv 0 \mod N\right\}$。

(1) 证明 $\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 诱导的群同态 $SL_2(\mathbb{Z})\to SL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ 为满射；

(2) 证明 $\Gamma(N)$ 是 $SL_2(\mathbb{Z})$ 的正规子群；

(3) 求 $\Gamma(N)$ 在 $SL_2(\mathbb{Z})$ 的指数。

4、若 f： $M\to L$，g： $L\to N$ 为交换群同态。

(1) 若 $\mathrm{Ker}(f)$，$\mathrm{Im}(f)$，$\mathrm{Im}(g)$ 为有限生成群。证明：$\mathrm{Ker}(gf)$ 和 $\mathrm{Im}(gf)$ 是有限生成群；

(2) 若 M 为 27 阶循环群，N 为 18 阶循环群，且有正合列 $0\to M\to L\to N\to 0$。求交换群 L 同构类。

5、 (1) 判断 $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ 是否为 PID；

(2) 求 $x^3-2=y^2$ 整数解。

6、 (1) 证明 (12)、$(12\cdots n)$ 生成了 S_n；

(2) 判断 $f(x)=x^5-4x+2$ 在 $\mathbb{Q}$ 上是否可约；

(3) 求 $f(x)$ 的 Galois 群。