中 国 科 学 技 术 大 学
2023-2024秋季学期微分方程引论期中试卷

姓名：________________________ 学号：________________________

注意: (1) 从第1-4题中选择三个题进行作答. 如果全做，得分最高的三个题计入总分. (2) 计算题只写结果不写过程，不给分. (3)所有题目中使用的定理或者命题需要注明.

1. (15分)求微分方程$y''-2y'+2y=e^x\sin x$的通解.

2. (15分)求微分方程组

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx}=\begin{pmatrix}3 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\mathbf{y}$$

   的通解.

3. (15分)分别作出$\mu=1$和$\mu=3$微分方程组

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=-x-\mu(x^2-1)y\end{cases}$$

   奇点$(0,0)$附近的相图.

4. (15分)利用(广义)幂级数方法求解微分方程

$$2xy''+y'+xy=0.$$

5. (15分) 令$\theta(x,\lambda)$ 是方程

$$\theta'(x,\lambda)=\cos\theta(x,\lambda)+\lambda(1+x^2)\sin^2\theta(x,\lambda),\quad x\in[0,1]$$

   满足初始条件$\theta(0,\lambda)=\lambda$ 的解.

   (a) 证明: 对于任意的$\lambda\in\mathbb{R}$, $\theta(x,\lambda)$在$[0,1]$上存在且唯一.

   (b) 证明: $\theta(x,\lambda)$关于$x\in[0,1]$, $\lambda\in\mathbb{R}$是连续可微的

   (c) 证明: 对于任意固定的$x\in(0,1]$, 函数$\theta(x,\lambda)$关于$\lambda\in\mathbb{R}$是严格单调递增的.

6. 设初值问题

$$\begin{cases} y' = \sin^2 x + (y+1)^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

的解向右侧可延伸的最大存在区间为$[0, \beta)$. 证明:

$$\frac{\pi}{4} \le \beta \le 1.$$

7. (15分)考虑方程组

$$\frac{dx}{dt} = Ax + R(t, x), \tag{1}$$

其中A是常数矩阵, $R(t,x)$在$\{(t,x) : t \ge t_0, \|x\| \le h\}$上连续, 且

$$\|R(t,x)\| \le \alpha(t)\|x\|,$$

其中$\alpha(t)$是$t \ge t_0$上的非负连续函数, 且$\int_{t_0}^{\infty} \alpha(t)dt < +\infty$. 证明:如果方程组$\frac{dx}{dt} = Ax$的一切解都是有界的, 那么方程组(1)的零解是Lyapunov正向稳定的.

8. (15分)考虑方程

$$y'' + f(x)y = 0,$$

其中$f \in C(\mathbb{R})$满足

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx + \int_1^{\infty} x|f(x)|dx < \infty.$$

(a) 证明存在至少一个解$\varphi(x)$使得

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 1, \quad \lim_{x\to+\infty} \varphi'(x) = 0.$$

提示: 把$x = +\infty$作为初值,向后演化,把问题转化为积分方程(需要证明)

$$\varphi(x) = 1 + \int_x^{\infty} (x-s)f(s)\varphi(s)ds.$$

(b) 证明存在至少一个解$\psi(x)$使得

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to+\infty} \psi'(x) = 1.$$

提示: 可以使用(a)的结论,即使你无法证明；也可以不使用.