中国科学技术大学数学科学学院
2023 ~ 2024 学年第 1 学期期末考试试卷

■ A 卷　　□ B 卷

课程名称　数学分析 (B3)　　课程编号　MATH1008

考试时间　2022 年 1 月 8 日下午　　考试形式　闭卷

姓 名 ________　学 号 ________　学 院 ________

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

一、【30 分】填空题与判断题.

(1) 设 $\mathbb{R}^3$ 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 将任意的向量 (x, y, z) 映为 $(2x-y, y+z, x)$, 则它在 $(0,0,0)$ 处的微分将向量 $(2022, 2023, 2024)$ 映成 ________________.

(2) 设 3 阶实对称方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $-1, 2, 3$, 当 $x=(x_1, x_2, x_3)$ 取遍 $\mathbb{R}^3$ 中所有满足 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=2024$ 的向量时, 函数 $x\boldsymbol{A}x^{\mathrm{T}}$ 的最小值为 ________.

(3) 记 $B_r=\{(x, y)\in\mathbb{R}^2 : (x-3)^2+(y-4)^2<r^2\}$, $r>0$. 那么使得

$$\varphi : B_r \to \varphi(B_r),\ (x, y) \mapsto (x^2-y^2,\ 2xy)$$

为同胚的正数 r 的上确界是 ________.

(4) $\mathbb{R}^n$ 中的连通开集一定道路连通.

判断正误: ________

(5) 对 $[0, 1]$ 上的实值连续函数空间 $C([0, 1])$ 赋予 sup 范数, 那么 $[0, 1]$ 上次数低于 2024 的实系数多项式全体是它的闭子集.

判断正误: ________

(6) 设 D 为 $\mathbb{R}^2$ 的非空有界子集. 那么 ∂D 是 $\mathbb{R}^2$ 的非空紧致子集.

判断正误: ________

二、【12 分】设 $\mathbb{M}(n)$ 是 n 阶实方阵的全体, 定义映射 $\phi : \mathbb{M}(n) \to \mathbb{M}(n)$ 为 $\phi(A) = AA^{\mathrm{T}}$. 求 $\mathrm{d}\phi_A(H)$, 其中 $A, H \in \mathbb{M}(n)$.

三、【12 分】设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的非空开子集, $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ 为 C^1 映射. 设函数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 满足 $f \circ \phi \equiv 0$, 且 $f^{-1}(0)$ 为 Jordan 零测集. 证明: 对于任意 $x \in U$, 都有 $\operatorname{rank} \mathrm{d}\phi(x) < n$.

四、【16 分】设 D 是 $\mathbb{R}^2$ 的非空子集, 设 $\delta > 0$. 请回答如下关于函数 $f: D \to \mathbb{R}$ 在 $P \in D$ 处的振幅 $\omega_f(P)$ 的两个问题, 每问独立评分.

(1) (8 分) 设存在 D 中两个收敛到 P 的点列 $\{P_n\}$ 与 $\{Q_n\}$, 使得对于任意 n 成立

$$|f(P_n) - f(Q_n)| \geq \delta.$$

$\omega_f(P,r)\geq\delta$ $\forall r$

证明: $\omega_f(P) \geq \delta$.

$n\in\mathbb{N}$, $\omega_f(P,\frac{1}{n}) \geq \delta \Rightarrow \exists P_n, Q_n \in B_{\frac{1}{n}}(P)$

$f(P_n)-f(Q_n) \geq \delta - \frac{1}{n}$

订

(2) (8 分) 设 $\omega_f(P) \geq \delta$. 证明: 存在 D 中两个收敛到 P 的点列 $\{P_n\}$ 与 $\{Q_n\}$, 使得 $\liminf_{n\to\infty} |f(P_n) - f(Q_n)| \geq \delta$.

装

五、【12 分】设 $D=[0,1]\times[0,1]$, 定义 D 上的函数 $f(x,y)$ 为

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & \text{如果 } x+y\in\mathbb{Q};\\ 0 & \text{否则.}\end{cases}$$

判断 f 是否为 D 上的黎曼可积函数, 并说明理由.

六、【18 分】设 C^1 函数 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 的像集合包含长度大于零的开区间 (a,b), 并且对于任意 $P\in f^{-1}(a,b)$ 都有 $\nabla f(P)=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)(P)\neq 0$. 如下四小问独立评分, 解答时可用前面小问结论.

(1) (5 分) 任取 $t_0\in(a,b)$, 任取 $P_0=(x_0,y_0,z_0)\in f^{-1}(t_0)$, 设 $\nabla f(P_0)$ 的第三个分量 $\frac{\partial f}{\partial z}(P_0)\neq 0$. 证明: 存在充分小的正数 δ, 存在 $\mathbb{R}^2$ 中以 (x_0,y_0) 为心的小开圆盘 V_0, 存在 $P_0\in\mathbb{R}^3$ 的 Jordan 可测开邻域 U_0 以及 C^1 参数变换

$$\Phi_0: V_0\times(t_0-\delta,\,t_0+\delta)\to U_0,\ (x,y,t)\mapsto\big(x,y,\varphi_0(x,y,t)\big),$$

使得 $f\big(x,y,\varphi_0(x,y,t)\big)=t$; 并求 Φ_0 的 Jacobi 行列式.

提示: 若 $f(P_0)$ 的第一或者第二个分量不等于零, 那么成立类似结论.

线

订

装

(2) (5 分) 设 g 是 U_0 上的有界实值连续函数, 用重积分换元公式证明

$$\int_{U_0} g\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} \mathrm{d}t \int_{f^{-1}(t)\cap U_0} \frac{g}{|\nabla f|}\,\mathrm{d}\sigma_t,$$

这里 $|\cdot|$ 为欧氏范数, $\mathrm{d}\sigma_t$ 是二维 C^1 曲面 $f^{-1}(t)$ 上的面积元.

(3) (3 分) 设长度大于零的有界闭区间 $[c, d] \subset (a, b)$, 且 $f^{-1}\big([c, d]\big)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的紧致 Jordan 可测集. 证明存在有限个点 $P_1, \cdots, P_n \in f^{-1}\big([c, d]\big)$, 使得由 (1) 得到的 P_1 的可测开邻域 $U_1, \cdots, P_n$ 的可测开邻域 U_n 构成 $f^{-1}\big([c, d]\big)$ 的开覆盖.

(4) (5 分) 证明: $D_1 := f^{-1}\big([c, d]\big) \cap U_1, \cdots, D_n := f^{-1}\big([c, d]\big) \cap U_n$ 都是 Jordan 可测集, 并且成立余面积公式:

$$\int_{f^{-1}\big([c,\, d]\big)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_c^d \mathrm{d}t \int_{f^{-1}(t)} \frac{\mathrm{d}\sigma_t}{|\nabla f|}.$$

提示: 存在 U_i 上连续紧支集函数 $g_i \geq 0$, 使得在 $f^{-1}\big([c, d]\big)$ 上成立 $\sum_{i=1}^n g_i \equiv 1$.