《数学分析 (B1)》2023 年期中考试

一、(6 分) 用极限的定义证明：当 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} \max\{a_n, b_n\} = c$。

二、(每小题 6 分，共 36 分)

1. 求极限
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n.$$

2. 已知 $0<k<1$，求极限
$$\lim_{n\to\infty}((n+1)^k - n^k).$$

3. 求极限
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1+x+x^2}-1}{\tan 2x}.$$

4. 求极限
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - \mathrm{e}^{-x^2/2}}{\sin^4 x}.$$

5. 已知 $\frac{a}{\pi}\notin\mathbb{Z}$，求极限
$$\lim_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{1/(x-a)}.$$

6. 求 $\ln\cos x$ 带有 Peano 余项的 4 阶 Maclaurin 级数。

三、(每小题 8 分，共 16 分)

1. 求由 $\begin{cases} x = t\cos t, \\ y = t\sin t, \end{cases}$ $(t\in[0,\pi])$ 定义的曲线在 $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 处的切线方程。

2. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2+x+1, & x\ge 0, \\ a\sin x + b, & x<0 \end{cases}$。$a, b$ 分别满足什么条件时，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 处连续和可导？当可导时求出 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的微分。

四、(12 分) 设 $f(x) = \sin 2x - x$, $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$。

(a) 求 $f(x)$ 的最值；

(b) 求 $f(x)$ 的拐点。

五、(10 分) 设 f 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，且
$$f(a)f(b)>0,\quad f(a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0,$$
证明：$\exists\xi\in(a,b): f'(\xi) = f(\xi)$。

六、(12 分) 设 f 在 $[a,b]$ 上有定义，且

(a) 对任意的 $x\in[a,b]$，都有 $f(x)\in[a,b]$；

(b) 存在常数 $k\in(0,1)$ 使得对于任意的 $x, y\in[a,b]$，都有 $|f(x)-f(y)|\le k|x-y|$。

若 $f(c)=c$，则称 c 是 $f(x)$ 的一个不动点。

证明:

(a) $f(x)$ 的不动点 x^* 存在且唯一；

(b) 对于任意的 $x_1 \in [a,b]$，构造序列 $x_{n+1}=f(x_n)$，总有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$。

七、(8 分) 设 f 在 $[0,1]$ 上二阶可导, 且 $f(0)=f(1)$, 同时 $|f''(x)| \le 2$ 恒成立。证明: $|f'(x)| \le 1$ 恒成立。