中国科学技术大学2023－2024学年第一学期
数学分析A3　期中试卷

姓名：＿＿＿＿＿＿　学号：＿＿＿＿＿＿＿

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

一(每题6分，共计24分)、讨论级数或无穷乘积的敛散性。

得分	

(1). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{n})^n$;

(2). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos n!}{n(n+1)}$；

(3). $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$；

(4). $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\cos\frac{1}{n}$.

二(12分)、讨论级数$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos 2n}{n^p}$的敛散性和绝对收敛性，其中$p\in\mathbb{R}$。

得分	

三(10分)、计算 $\int_{\ln 2}^{\ln 5} f(x)dx$，其中 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$。

得分	

四(10分)、求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ 的和。

得分	

五(20分)、 得分

(1). 研究函数列 $\{f_n(x)=e^{-(x-n)^2}\}$ 在下列区间上的一致收敛性:

$$(a).\ (-1,1),\qquad (b).\ (-\infty,+\infty);$$

(2). 研究函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{1}{3^n x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上的收敛性和一致收敛性。

六(8分)、设正数列$\{a_n\}$单调递减，且$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$发散，试问$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n$是否收敛？并说明理由。

得分	

七(8分)、设函数$f(x)$在$[0,1]$上有任意阶导数且$f(0)=0$。若存在$\alpha\in(0,1)$使得$f'(x)=f(\alpha x), x\in[0,1]$，则$f(x)=0$。

得分	

八(8分)、设对每个$n \geq 1$, 函数$f_n : [0,1] \to [0,1]$ 为单调增函数，若$f_n(x)$ 在$[0,1]$ 中收敛于连续函数$f(x)$，证明$f_n(x)$ 在$[0,1]$ 中一致收敛于$f(x)$。（注意f_n 不一定是连续函数）

得分	

2023 数分 A3 期中考试题及 1,3,5,7 题评分标准

1. (24 分，每小题 6 分) 讨论级数或无穷乘积的敛散性。

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$ (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\cos n!}{n(n+1)}$ (3) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ (4) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\cos\dfrac{1}{n}$

评分标准.

(1) 每道小题，结论错误(-6)；使用判别法的条件没写全（或未经证明给出一个断言，断言本身很难证），且那题根本不能用该判别法做(-6)；

(2) 每道小题，使用判别法的条件没写全，但那题可以用该判别法做(-3)，使用课后习题的结论(-3)，证明过程出现核心步骤有错误(-3)；

(3) 每道小题，某些计算出错(-2)，如第 (1) 问计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 出错，第 (4) 问计算 $\cos\frac{1}{n}$ 的二阶展开出错；

(4) 第 (4) 问没有判断保号，或者过程中没有能够得到保号的式子(-3).

2. (12 分) 讨论级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\cos 2n}{n^p}$ 的敛散性和绝对敛散性，其中 $p\in\mathbb{R}$

3. (10 分) 计算 $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 5}f(x)\mathrm{d}x$，其中 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\mathrm{e}^{-nx}$

评分标准.

(1) 证明级数一致收敛(6 分)；计算积分(4 分)；

(2) 证明一致收敛部分：写出一致收敛结论(2 分)，但一致收敛的范围写错（写了 $(0,+\infty)$ 一致收敛）不得分；

(3) 证明一致收敛部分：用了正确的方法，但重要步骤出现错误(-2)；对通项用上确界判别法证一致收敛的不得分；直接写出 $f(x)$ 表达式，没有计算过程的(-2)；没写一致收敛的范围，或者没有任何地方写出讨论一致收敛性的 x 的范围(-1)；

(4) 计算部分：结果错误(-2)，结果错误的会视计算步骤适当给分。

注.

(1) 这里之所以强调要写一致收敛范围，或限制 x 的范围来讨论一致收敛性，是因为本题的级数在 $(0,+\infty)$ 不一致收敛；

(2) 选择直接计算 $f(x)$ 表达式来做这题的同学，如果计算出现严重错误，丢分会很严重，所以涉及计算的题目大家一定要细心再细心！

4. (10 分) 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}$ 的和.

5. (20 分)(1) 研究函数列 $\{f_n(x)=\mathrm{e}^{-(x-n)^2}\}$ 在下列区间的一致收敛性：

$$(a)\ (-1,1)\qquad (b)\ (-\infty,+\infty)$$

(2) 研究函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\dfrac{1}{3^nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 上的收敛性和一致收敛性.

评分标准.

(1) 每个部分各占5 分；

(2) 结论错误(-5)；每有一个结论正确(2 分)（共 4 个结论，全写对可以拿 8 分）；

(3) 第 (1) 问的 (a)，使用上确界判别法计算 $\beta_n=\mathrm{e}^{-(n-1)^2}$ 出错(-2)；其他计算，如 (b) 中 β_n 的值算错，第 (2) 问取点代入计算函数值验证通项不一致趋于 0 算错(-1).

6. (8 分) 设正数列 $\{a_n\}$ 单调递减，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^na_n$ 发散，试问 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{1+a_n}\right)^n$ 是否收敛？

7. (8 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 有任意阶导数，且 $f(0)=0$. 若存在 $\alpha\in(0,1)$ 使得 $f'(x)=f(\alpha x),x\in[0,1]$，则 $f(x)=0$.

评分标准.

(1) 对比较多见的做法而言，证明 $f^{(n)}(x)$ 的某个表达式(3 分)，证明 $f(x)$ 可以在 $x=0$ 附近做幂级数展开(3 分)，推导 $f(x)=0$(2 分)；

(2) 没有证明直接说 $f(x)$ 可以做幂级数展开(-2)；

(3) 写出了 $f^{(n)}(x)$ 表达式的（中间没有做任何的放缩），$f^{(n)}(x)=\alpha^{\frac{n(n-1)}{2}}f(\alpha^nx)$，系数和括号内系数各1 分.

8. (8 分) 设对每个 $n\geqslant 1$，函数 $f_n:[0,1]\to[0,1]$ 为单调递增函数，若 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 中收敛于连续函数 $f(x)$，证明 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 中一致收敛于 $f(x)$.