中国科学技术大学2023年秋
数学分析A3期末考试试卷

2024年1月13日 19:00-21:00

姓名：__________ 系别：__________ 学号：__________

题号	1	2	3	4	5	6	总分
得分							

1. (35分) 判断下列命题的真伪并说明理由.

(1) 设 $f(x)$ 在 $[0,1)$ 中连续且 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=+\infty$，若 $\displaystyle\int_0^1 f(x)^2\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；

(2) 设 $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在有限，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$;

(3) 广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2(x-1)^2}}$ 发散；

(4) 广义积分 $\int_0^{+\infty} ue^{-ux}\mathrm{d}x$ 关于 $u \in (0, +\infty)$ 一致收敛；

(5) 设 $f(x)$ 在有限区间 $[a, b]$ 上 Riemann 可积，则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $[a, b]$ 上连续函数 $g(x)$, 满足：

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

2. (14分) 利用 $f(x)=|x|$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的Fourier展开式和Parseval等式，求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$ 的和。

3. (8分) 解积分方程

$$\int_0^{+\infty} g(u)\sin(xu)\mathrm{d}u = f(x), \quad 其中 f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\sin x, & 0 \le x \le \pi; \\ 0, & \pi < x + \infty. \end{cases}$$

4. (16分) 计算

(1). $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan x}\mathrm{d}x$;

(2). $\lim\limits_{\nu \to 0+} \left(\int_0^1 e^{\nu x^2} \mathrm{d}x \right)^{1/\nu}$

5. (15分) 设 $\varphi(u)=\int_0^{+\infty} e^{-ux}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$.

(1) 证明：$\varphi(u)$ 为 $[0,+\infty)$ 上的连续函数；

(2) 证明：当 $u>0$ 时，$\varphi(u)=\frac{\pi}{2}-\arctan u$；

(3) 求 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$.

6. (12分) (1) 设$f(x)$在$[a,b]$上Riemann可积，$g(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上周期 2π 的连续函数，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)g(nx)\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 设$f(x)$在$[a,+\infty]$上绝对可积，$g(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上周期 2π 的连续函数，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^{+\infty} f(x)g(nx)\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$