2023年数分A2第三次单元测试题

2023年7月7日

1. (10分) 计算下述积分，其中Γ为顺时针方向的单位圆周：

$$\int_{\Gamma} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2 + y^2},$$

2. (15分) (1) 设正则曲面$\Sigma : \vec{r} = \vec{r}(u,v), (u,v) \in \Delta$, 写出曲面$\Sigma$面元和面积的表达式，并证明该面积的定义不依赖于参数方程的选取。

(2) 求螺旋面的面积，其中$\Delta = \{(r,\theta) : 0 \leqslant r \leqslant a, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$, h 为常数，螺旋面的参数方程为

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = h\theta \end{cases}$$

3. (15分)计算积分

$$\iint_{\Sigma} 4xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z - 2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (1 - z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中Σ 是曲线$z = e^y$, $0 \leqslant y \leqslant a$, 绕$z$轴旋转生成的旋转曲面，正向取为向下。

4. (15分)计算

(1)设向量场

$$\boldsymbol{F} = xy^2z^2\boldsymbol{i} + z^2\sin y\boldsymbol{j} + x^2e^y\boldsymbol{k},$$

求$\mathrm{div}\boldsymbol{F}$, $\mathrm{grad}(\mathrm{div}\boldsymbol{F})$, $\mathrm{rot}\boldsymbol{F}$.

(2)证明下列向量场是有势场，并求出它的势函数。

$$\boldsymbol{F} = (2x\cos y - y^2\sin x)\boldsymbol{i} + (2y\cos x - x^2\sin y)\boldsymbol{j}.$$

5. (15分)

(1)记$\vec{p} = (x,y,z), p = \|\vec{p}\|_2, \Sigma$是球面$\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$, 方向向外, 计算积分

$$\iint_{\Sigma} \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{p^3}.$$

(2)设$D = \mathbb{R}^3 \backslash \{\vec{0}\}$, 判断$\dfrac{\vec{p}}{p^3}$是否是$D$上的旋度场. 若是，求出它的一个向量势函数；若否，详细说明原因。

6. (10分)设$\rho(x,y,z)$是原点到椭球面

$$S:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

上的任一点(x,y,z)处的切平面的距离，计算积分：

$$\int_S \frac{d\sigma}{\rho(x,y,z)}.$$

7. (10分) 设Γ是$\mathbb{R}^2$上的光滑的简单封闭曲线，其外法向为$\vec{n}$，G是由Γ围成的有界区域，若$\Delta u=0$在G上成立，并记$r=\sqrt{x^2+y^2}$，计算下列积分，需要写出详细过程和每一步的依据。

$$\int_\Gamma u\frac{\partial \ln r}{\partial \vec{n}}-\ln r\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\mathrm{d}s$$

8. (10分)设圆周L的方程是$(x-1)^2+(y-1)^2=1$, 方向为逆时针方向, f是一元正值连续函数, 且满足

$$\int_L -\frac{y}{f(x)}\mathrm{d}x+xf(y)\mathrm{d}y=2\pi.$$

求f的表达式.