

数学分析A2 第二次单元测试

学生所在系:

姓名:

学号:

总分:

2023年6月5日

一、计算累次积分(每小题15分)

得分	
----	--

$$(1) \int_0^{2\pi} dx \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (x^2 - 1)e^{y^2} dy .$$

$$(2) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (1-y)e^{-(1-y-z)^2} dz .$$

二、(10分)

得分	
----	--

设 B 是 \mathbf{R}^2 上的一个零面积集, 对任意实常数 λ , 令 $\lambda B = \{(\lambda x, \lambda y) : (x, y) \in B\}$, 证明 λB 是零面积集.

三、(10分)

得分	
----	--

计算积分 $\iint_{[-1,1] \times [0,1]} |x^2 - y| dx dy.$

四、(10分)

得分	
----	--

设单变量函数 f 在 $[0, 1]$ 上连续, 且 $f(1) = 1$, 令 $F(t) = \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq t^2} f(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}) dx dy.$

求 $F'(1).$



五、(10分)

得分

求曲面 $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z^3 (a > 0)$ 所围成立体的体积.

六、(10分)

得分

Ω 由平面 $z = x, z = 4x, z = y, z = 4y$ 与曲面 $xyz = 1, xyz = 4$ 所围成的闭区域.

设单变量函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有连续的导函数, 且 $f(1) = 1, f(\frac{1}{4}) = -1$.

计算 $\iiint_{\Omega} \left[\frac{x}{z} f'(\frac{x}{z}) + \frac{y}{z} f'(\frac{y}{z}) \right] dx dy dz$.

七、(10分)

得分

设 f 是单变量连续函数, 证明:

$$\int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(x_1) f(x_2) \cdots f(x_n) dx_n = \frac{1}{n!} \left(\int_0^1 f(t) dt \right)^n.$$

八、(10分)

得分

设 $f(x, y)$ 和 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ 在 $I = [a, b] \times [c, d]$ 上连续, 且满足 $f(x, c) = 0$.

证明: $\iint_I f^2(x, y) dx dy \leq \frac{1}{2} (d - c)^2 \iint_I \left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right]^2 dx dy$.

