数学分析A2 第一次单元测试

学生所在系：　　　姓名：　　　学号：　　　总分：

2023年5月5日

一、(20分)　得分

研究函数$f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0)\ . \end{cases}$

在$(0,0)$处的连续性，一阶偏导数的存在性和连续性，函数的可微性.

二、(20分)　得分

设函数$u=f(x,y,z)$有连续的二阶偏导数，又函数$y=y(x), z=z(x)$由下列二方程确定: $e^{xy}-xy=2$, $e^x=\int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}dt$, 求$\frac{du}{dx}$ 和$\frac{d^2u}{dx^2}$.

三、(20分)　得分

设二元函数$f(x,y)$在点$(0,0)$的某个邻域内有二阶连续偏导数，且$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$, 求$f(0,0)$ 及$f(x,y)$ 在点$(0,0)$ 处的一阶和二阶偏导数的值.

四、(10分)　得分

证明曲面$z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=x^3f(\frac{y}{x})$($f$可微)上任意点处的切平面在$oz$轴上的截距与切点到坐标原点的距离之比为常数，并求此常数.

五、(10分)　得分

已知曲面$4x^2+4y^2-z^2=1$与平面$x+y-z=0$的交线在Oxy平面上的投影为一椭圆，求此椭圆的面积.

六、(10分)　得分

设可微函数$F(x,y)$可写成$F(x,y)=f(x)+g(y)$, 又令$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$时，有$F(r\cos\theta,r\sin\theta)=S(r)$, 试求$F(x,y)$的表达式.

七、(10分)　得分

设$B=\{(x_1,x_2)\in R^2: x_1^2+x_2^2<1\}$是$R^2$中的单位开球，函数$u,v$在$\overline{B}$上连续，在$B$内二阶连续可导，满足

$$\begin{cases} -\Delta u(x)-(1-u^2(x)-v^2(x))u(x)=0, & x\in B \\ -\Delta v(x)-(1-u^2(x)-v^2(x))v(x)=0, & x\in B \\ u(x)=v(x)=0, & x\in\partial B \end{cases}$$

其中$x=(x_1,x_2)$, $\Delta u(x)=\frac{\partial^2u(x)}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2u(x)}{\partial x_2^2}$.

证明: $u^2(x)+v^2(x)\le 1$ $(\forall x\in\overline{B})$.