2023年春季学期数学分析(A2)期末考试

授课教师：邓建松、罗罗

2023年7月15日　14:30-16:30

一、（15分）设函数$z=z(x,y)$是由$z=x+y\varphi(z)$所确定的隐函数，$u=f(z)$，求$\partial_x(\varphi^2(z)\partial_x u)$.

二、（15分）求函数$f(x,y)=x+y+xy$在曲线$x^2+xy+y^2=3$上的最大方向导数。

三、（15分）令区域$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: r^2\le \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le R^2,\ R>r>0\}$. 计算极限

$$\lim_{r\to 0_+, R\to+\infty}\iint_D \frac{e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

四、（15分）设Σ_+是椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$的上半部分，即$z\ge 0,\ a,b,c>0$, 法向朝上，计算第二型曲面积分

$$\iint_{\Sigma_+}\frac{zx}{a^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{yz}{b^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{z^2}{c^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

五、（10分）圆盘$D=(x,y)\in\mathbb{R}^2:(x-1)^2+(y-1)^2\le 4$. 设二元函数$f(x,y)\in C^2(D)$满足$f(1,1)=0$, f在$(1,1)$处取到极值，以及存在常数$M>0$使得对任意$(x,y)\in D$都有$|\partial_x^2 f(x,y)|\le M$, $|\partial_{xy}^2 f(x,y)|\le M$, $|\partial_y^2 f(x,y)|\le M$. 证明:

$$\iint_{[0,1]^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\le \frac{7M}{12}.$$

六、（10分）证明二元函数泰勒公式的唯一性：若有

$$\sum_{i+j=0}^{n}A_{ij}x^i y^j+o\left(\sqrt{x^2+y^2}^{\,n}\right)=0\ \ ((x,y)\to(0,0)).$$

证明：$A_{ij}=0$，其中i,j是非负整数, $i+j=0,1,\cdots,n$.

七、（10分）证明：对任意实数$x>0, y\in\mathbb{R}$, 都有$xy\le x\log x-x+e^y$.

八、（10分）设函数$f(x,y)\in C^2(R)$且满足$f(0,0)=0$, $\Delta f=x^2+y^2$. 设$\Gamma:\{x^2+y^2=1\}$为单位圆周。

1. 证明: $\int_0^1 f_x(x(u),y(u))x'(u)+f_y(x(u),y(u))y'(u)\,\mathrm{d}u=f(x(t),y(t))-f(x(0),y(0))$.
2. 计算曲线积分$\int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}\ell$.