中国科学技术大学

2023－2024学年第一学期期中考试试卷

考试科目：数学分析A1　　　　得分：

学生所在系：　　　　姓名：　　　　学号：

注意事项:

1.答卷前, 考生务必将姓名、学号等填写清楚.

2.本考试为闭卷考试, 共九道大题, 总分100分, 考试时间120分钟.

3.解答请写在试题后的空白处, 若写不下, 可写在试题的背面, **写在草稿纸上无效**.

2023年11月19日

一、(10分)

得分	

设$f(x)$具有连续的二阶导数, 且$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^2$, 求$f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$的值(需要说明理由).

二、(10分)

得分	

已知$f(x)$在$x=1$处可导, 且在$x=0$的某个领域内满足

$$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+o(x)(x\to 0)\ ,$$

求曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程.

三、(10分)

得分	

设函数$y=(x^2+2x-3)^n(\arcsin x)^2$, 其中$n$为正整数, 求高阶导数$y^{(n)}(1)$.

四、(10分)

得分	

证明数列$\{\cos(n+a)\}$发散(其中a是一非零实常数).

五、(10分)

得分	

证明：函数$f(x)$在区间I上一致连续的充分必要条件是: 对I上任意两点列$\{x_n\}$, $\{y_n\}$, 只要$x_n - y_n \to 0(n \to \infty)$, 就有$f(x_n) - f(y_n) \to 0(n \to \infty)$.

六、(15分)

得分	

设函数$f(x)$在$x=0$处可导, 令$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$, 问当且仅当$f(x)$在$x=0$处取何值时, $F(x)$在$x=0$处可导?

七、(15分)

得分	

设函数$f(x)$在有限闭区间$[a,b]$上定义, 对任意$x_0 \in [a,b]$时, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在(当$x_0$是区间端点时, 此时的极限是相应的单侧极限)且满足$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \le f(x_0)$.

(1) 证明：$f(x)$在$[a,b]$上有界.

(2) 证明：$f(x)$在$[a,b]$上有最大值.

八、(10分)

得分	

问是否存在函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续可导且满足$f(x)>0, f^{'}(x)=f(f(x))$?请给出你的结论, 并证明之.

得分	

九、(10分)

设函数$f(x)$在$[-1,1]$上有连续的二阶导数, 且$f(0)=0$.

证明：存在$\xi \in [-1,1]$, $\eta \in (-1,1)$使得$f''(\xi)=6f(\eta)$.