线性代数 A2 期中考试

2023 年 11 月 8 日 9:45—11:45，5302 教室

姓名__________________ 学号_________________________ 得分__________________

说明：需给出详细解答过程．结果需化简．禁止使用课本习题或其他参考书中的结论．

1. (20 分) 设实二次型 $Q(x) = \sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4} (x_i + x_j)^2$，其中 $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$.

   (1) 求对称实方阵 S 使得 $Q(x) = x^T S x$.

   (2) 求 $\dfrac{Q(x)}{x^T x}$ 的取值范围.

   (3) 求所有实数 λ，使得 $Q(x) \geqslant \lambda x_1^2$，$\forall x$.

2. (15 分) 设 $V = \{Q_A(x) = x^T A x \mid A \in \mathbb{R}^{2\times 2}\}$，其中 $x = (x_1, x_2)^T$.

   (1) 求证：V 在函数的加法、数乘运算下构成实线性空间.

   (2) 设 $\rho : \mathbb{R}^{2\times 2} \to V$，$A \mapsto Q_A(x)$. 证明或否定 ρ 是同构映射.

   (3) 求 V 的一个基，并给出任意 $Q_A(x)$ 在此基下的坐标.

3. (20 分) 设实线性空间 $V = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(f) \leqslant 2\}$，取定实数 $a_1 < a_2 < a_3$，记 $f_1 = (x - a_2)(x - a_3)$，$f_2 = (x - a_1)(x - a_3)$，$f_3 = (x - a_1)(x - a_2)$，$g_1 = 1$，$g_2 = x - a_1$，$g_3 = (x - a_1)(x - a_2)$.

   (1) 求证：$\{f_1, f_2, f_3\}$ 和 $\{g_1, g_2, g_3\}$ 都是 V 的基.

   (2) 求从 $\{f_1, f_2, f_3\}$ 到 $\{g_1, g_2, g_3\}$ 的过渡矩阵.

4. (15 分) 设实线性空间 V 由所有 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 连续函数构成. V 的子空间

   $$V_1 = \left\{ \sum_{k=0}^{2} a_k \sin^k x \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\},\ V_2 = \left\{ \sum_{k=0}^{2} a_k \cos^k x \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

   分别求 $V_1 \cap V_2$ 和 $V_1 + V_2$ 的一个基.

5. (15 分) 设实线性空间 $V_0 = \{x \in \mathbb{R}^{n\times 1} \mid Ax = \mathbf{0}\}$，$V_1 = \{x \in \mathbb{R}^{n\times 1} \mid Ax = x\}$，其中 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 满足 $A^2 = A$. 求证：$\mathbb{R}^{n\times 1} = V_0 \bigoplus V_1$.

6. (15 分) 设实线性空间 $V = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid f(1) = f(2) = 0\}$. 分别求 V 和 $\mathbb{R}[x]/V$ 的一个基.

参考答案与评分标准

1. (1) $S=\begin{pmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{pmatrix}$. (5 分)

   (2) S 的特征值 $2,2,2,6$．$\dfrac{x^TSx}{x^Tx}$ 的取值范围 $[2,6]$. (5 分)

   (3) $Q(x)\geqslant\lambda x_1^2\Leftrightarrow S-\lambda E_{11}$ 半正定 $\Leftrightarrow\det(S-\lambda E_{11})\geqslant 0\Leftrightarrow\lambda\leqslant\dfrac{12}{5}$. (10 分)

2. (1) 验证运算封闭 + 八条性质. (5 分)

   (2) ρ 不是单射，故不是同构映射. (5 分)

   (3) Q_A 在基 $Q_1=x_1^2,\ Q_2=x_1x_2,\ Q_3=x_2^2$ 下坐标 $(a_{11},a_{12}+a_{21},a_{22})$. (5 分)

3. (1) $\dim V=3$．设 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$ 使得 $\lambda_1f_1(x)+\lambda_2f_2(x)+\lambda_3f_3(x)=0$.
   取 $x=a_1,a_2,a_3$，解得 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$．故 f_1,f_2,f_3 线性无关.
   $(g_1\ \ g_2\ \ g_3)=(1\ \ x\ \ x^2)A$，$A$ 是单位上三角方阵，得 g_1,g_2,g_3 线性无关. (10 分)

   (2) 设 $(g_1(x)\ g_2(x)\ g_3(x))=(f_1(x)\ f_2(x)\ f_3(x))P$．取 $x=a_1,a_2,a_3$，得

$$\begin{pmatrix}1&&\\1&a_2-a_1&\\1&a_3-a_1&(a_3-a_1)(a_3-a_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d_1&&\\&d_2&\\&&d_3\end{pmatrix}P$$

   其中 $d_i=\prod\limits_{j\neq i}(a_i-a_j)$．由此可得过渡矩阵 P. (10 分)

4. $V_1=\mathrm{Span}(1,\sin x,\cos 2x)$，$V_2=\mathrm{Span}(1,\cos x,\cos 2x)$. (5 分)

   设 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4\in\mathbb{R}$ 使得 $\lambda_1+\lambda_2\sin x+\lambda_3\cos x+\lambda_4\cos 2x=0$．取 $x=0,\pi,\pm\frac{\pi}{2}$，
   解得 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$．故 $1,\sin x,\cos x,\cos 2x$ 线性无关. (5 分)

   $V_1\cap V_2$ 有基 $\{1,\cos 2x\}$，V_1+V_2 有基 $\{1,\sin x,\cos x,\cos 2x\}$. (5 分)

5. 设 $\alpha\in V_0\cap V_1$，则 $\alpha=A\alpha=\mathbf{0}$. (5 分)

   对于任意 $\alpha\in\mathbb{R}^{n\times 1}$，易验证 $\alpha-A\alpha\in V_0$，$A\alpha\in V_1$，故 $\alpha\in V_0+V_1$. (5 分)

   综上，$\mathbb{R}^{n\times 1}=V_0\bigoplus V_1$. (5 分)

6. $V=\{(x-1)(x-2)q(x)\mid p\in\mathbb{R}[x]\}$．$V$ 有基 $\{(x-1)(x-2)x^k\mid k\in\mathbb{N}\}$. (6 分)

   对于任意 $f\in\mathbb{R}[x]$，存在 $q,r\in\mathbb{R}[x]$，使得 $f(x)=(x-1)(x-2)q(x)+r(x)$ 并且
   $\deg r(x)\leqslant 1$．即 $[f]=[r]=r_0[1]+r_1[x]$．故 $\mathbb{R}[x]/V$ 有基 $[1],[x]$. (9 分)