1. (10 分) 陈述欧氏空间上的线性变换是规范变换的三个等价条件.

解答: 设 $\mathscr{A}^*$ 是 $\mathscr{A} \in L(V)$ 的伴随变换. $\mathscr{A}$ 是规范变换的等价条件有

① $\mathscr{A}\mathscr{A}^* = \mathscr{A}^*\mathscr{A}$. ② $|\mathscr{A}\alpha| = |\mathscr{A}^*\alpha|$，$\forall \alpha \in V$. ③ $(\mathscr{A}\alpha, \mathscr{A}\beta) = (\mathscr{A}^*\alpha, \mathscr{A}^*\beta)$，$\forall \alpha, \beta \in V$.
④ $\mathscr{A}$ 在 V 的标准正交基下的矩阵 A 是规范方阵. (每个条件 3.3 分)

2. (15 分) 求 $(1,1,1,-1,1)^T$，$(1,2,0,0,2)^T$ 生成的子空间 W 在欧氏空间 $\mathbb{R}^{5\times 1}$（其上内积是标准内积）的正交补空间 $W^\perp$ 的一组标准正交基.

解答: 求解线性方程组，得 $W^\perp = \mathrm{Span}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$，其中
$\alpha_1 = (0,-1,0,0,1)^T$，$\alpha_2 = (0,0,1,1,0)^T$，$\alpha_3 = (-2,1,1,0,0)^T$. (6 分)

作 Gram-Schmidt 标准正交化，得 $W^\perp$ 的一组标准正交基
$\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,0,0,1)^T$，$\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,1,0)^T$，$\beta_3 = \frac{1}{2\sqrt{5}}(-4,1,1,-1,1)^T$. (9 分)

3. (10 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. 求正交阵 O 使得 O^TAO 为对角形.

解答: A 的特征值 $\lambda_1 = 2$，$\lambda_2 = \lambda_3 = -1$. (3 分)

对应的特征向量 $\alpha_1 = (1,1,1)^T$，$\alpha_2 = (-1,1,0)^T$，$\alpha_3 = (-1,0,1)^T$.
标准正交化为 $\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$，$\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^T$，$\beta_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,1)^T$. (6 分)

$O = (\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)$ 使得 $O^TAO = \mathrm{diag}(2,-1,-1)$. (1 分)

4. (15 分) 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的奇异值分解.

解答: $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值 $\lambda_1 = 2+\sqrt{5}$，$\lambda_2 = 2-\sqrt{5} < 0$. (4 分)

对应的特征向量 $\alpha_1 = (2, 1+\sqrt{5})^T$，$\alpha_2 = (2, 1-\sqrt{5})^T$.
标准正交化为 $\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\alpha_1$，$\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\alpha_2$. (6 分)

$B = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & |\lambda_2| \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1^T \\ -\beta_2^T \end{pmatrix}$ 为所求. (5 分)

5. (10 分) 设欧氏空间 $V = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ 上的内积为

$$(f,g) = \int_0^{+\infty} f(x)g(x)e^{-x}dx.$$

试求线性变换 $\mathscr{A}: f(x) \mapsto f'(x)$ 的伴随变换.

解法 1: 取 V 的基 $1, x, x^2$. 度量矩阵 $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}$. (3 分)

$G^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & \frac{1}{2} \\ -3 & 5 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$. $\mathscr{A}$ 的矩阵表示 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. (3 分)

$\mathscr{A}^*$ 的矩阵表示 $B = G^{-1}A^TG = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (3 分)

$\mathscr{A}^*: 1 \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 2$，$x \mapsto x - 1$，$x^2 \mapsto x^2 - 2x$. (1 分)

解法 2：取 V 的基 $1, x, x^2$. 度量矩阵 $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}$. (3 分)

作相合变换，得标准正交基 $\alpha_1 = 1$，$\alpha_2 = x - 1$，$\alpha_1 = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$. (3 分)

$\mathscr{A}$ 在 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下矩阵表示 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. (3 分)

$\mathscr{A}^*: \alpha_1 \mapsto \alpha_2 - \alpha_3$，$\alpha_2 \mapsto \alpha_3$，$\alpha_3 \mapsto 0$. (1 分)

6. (15 分) 设 $n \geqslant 4$. 设 n 阶实方阵 $A = (a_{ij})$ 满足 $a_{ij} = \pm 1$ 且它的行向量两两正交.
证明：(1) A 的列向量两两正交. (2) n 是偶数. (3) n 是 4 的倍数.

解答：设 A 的行向量 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$. (1) $AA^T = nI \Rightarrow A^TA = nI$.
(2) 由 $\alpha_2 \perp \alpha_1$，得 $2 \mid n$. (3) 由 $\alpha_3 \perp \alpha_1$ 和 $\alpha_3 \perp \alpha_2$，得 $4 \mid n$. (每问 5 分)

7. (15 分) 将下述命题用矩阵语言陈述，并证明之：设 V 是欧氏空间，W 是规范变换 $\mathscr{A}: V \to V$ 的不变子空间，则 W 的正交补 $W^{\perp}$ 也是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间.

解答：取 W 的标准正交基 $e_1, \cdots, e_k$，扩充为 V 的标准正交基 $e_1, \cdots, e_n$，则 $\mathscr{A}$ 在 $e_1, \cdots, e_n$ 下的矩阵表示 $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ O & A_3 \end{pmatrix}$ 是规范方阵，其中 $A_1 \in \mathbb{R}^{k \times k}$.

原命题化为：若规范方阵 $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ O & A_3 \end{pmatrix}$，则 $A_2 = O$. 证明如下. (6 分)

$AA^T = A^TA \Rightarrow A_1A_1^T + A_2A_2^T = A_1^TA_1 \Rightarrow \operatorname{tr}(A_2A_2^T) = 0 \Rightarrow A_2 = O$. (9 分)

8. (10 分) 设 n 阶实对称方阵 $A = (a_{ij})$ 满足条件 $a_{ii} > \sum\limits_{j \neq i} |a_{ij}|$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.
证明：A 是正定矩阵.

解法 1：(1) 断言 $\det(A) \neq 0$. 否则 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 有解 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.
设 $|x_i| = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_j|$，则 $|a_{ii}x_i| = |\sum\limits_{j \neq i} a_{ij}x_j| \leqslant \sum\limits_{j \neq i} |a_{ij}||x_i|$，与题设矛盾. (4 分)

(2) 断言 $\det(A) > 0$. 否则 A 有特征值 $\lambda \leqslant 0$. 由 (1)，$\det(A - \lambda I) \neq 0$，矛盾. (3 分)

(3) 由 (1)，A 的顺序主子式都 > 0，再结合 $A^T = A$，得 A 是正定的. (3 分)

解法 2：设 $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$，则 $\mathbf{x}^TA\mathbf{x} = \sum\limits_i a_{ij}x_ix_j \geqslant \sum\limits_i a_{ii}x_i^2 - \sum\limits_{i \neq j} |a_{ij}| \dfrac{x_i^2 + x_j^2}{2}$
$= \sum\limits_i a_{ii}x_i^2 - \sum\limits_{i \neq j} |a_{ij}| x_i^2 > 0$. 由定义，$A$ 是正定的. (10 分)