中国科学技术大学数学科学学院

2022～2023 学年第 2 学期期中考试试卷

■A 卷　　□B 卷

课程名称	线性代数（A1）	课程编号	MATH1004
考试时间	2023 年 5 月 4 日	考试形式	闭卷
姓 名	学 号	学 院	

试题中总假设 F 是域, O 是零矩阵, I_n 是 n 阶单位阵.

1. (40 分) 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&6&8\\3&6&9&12\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\1&2&0&1\\3&6&0&1\end{pmatrix}.$$

(i) 求线性方程组 $A(x_1,x_2,x_3,x_4)^T=(2,4,6)^T$ 的解.

(ii) 对所有正整数 n, 求 $(AA^T)^n$.

(iii) 方阵 I_3-AA^T 是否可逆, 若可逆, 试求它的逆.

(iv) 求矩阵 $A+B$ 的列向量集合的一个极大线性无关组.

2. (30 分) 给定方阵 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in F^{2\times2}$. 记 $V_A=\{X\in F^{2\times2}\mid AX-XA=O\}$.

(i) 证明: V_A 是线性空间 $F^{2\times2}$ 的非零子空间.

(ii) 若 $\dim_F V_A=4$, 试求 A 需满足的条件.

(iii) 证明: 不存在 $X\in F^{2\times2}$ 使得 $AX-XA=I_2$.

3. (10 分) 设 $A\in F^{m\times n}$, $B\in F^{n\times p}$. 证明: AB 的行向量空间是 B 的行向量空间的子空间.

4. (10 分) 方阵 A 称为幂零方阵是指存在正整数 k, 使得 $A^k=O$. 证明: 若 A,B 都是幂零阵且 $AB=BA$, 则 $A+B$ 也是幂零阵.

5. (10 分) 设 V 是由次数 $<n$ 的实系数多项式组成的线性空间. 设 a_i $(i=1,\cdots,n)$ 是两两不同的实数, $f_i(x)=\prod_{j\neq i}(x-a_j)$. 证明: $\{f_i(x)\mid 1\leq i\leq n\}$ 是 V 的一组基.