2023年春季学期 线性代数(A1)期末考试

授课教师：欧阳毅(a卷)、王新茂(b卷)

题号	1 (17 分)	2 (17 分)	3 (17 分)	4 (17 分)	5 (16 分)	6 (16 分)	总分
得分							

说明：1. 需给出详细解答和证明过程，结果须化简.

2. 若某题有 a、b 两个版本，则选做其中 1 个版本，多做不得分.

3. 禁止直接引用课本习题或其他参考书中的结论. 禁止使用计算器等电子设备

1a、设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&3&5&7&9\\2&4&6&8&10\\1&1&1&1&1\end{pmatrix}$. 设$\mathcal{A}$是线性变换$X\in\mathbb{F}^{5\times1}\mapsto AX\in\mathbb{F}^{3\times1}$.

试求$\mathbb{F}^{5\times1}$的基M_1和$\mathbb{F}^{3\times1}$的基M_2，使得$\mathcal{A}$在这两组基下的矩阵是$\begin{pmatrix}I_r&O\\O&O\end{pmatrix}$的形式.

1b、设n阶正交方阵A满足$\operatorname{rank}(A-I_n)=1$.

求证：存在$\alpha\in\mathbb{R}^{n\times1}$，使得$\alpha^T\alpha=1$并且$A=I_n-2\alpha\alpha^T$.

2a、设$V_i(i=0,1,\cdots,n)$是维数为d_i的$\mathbb{F}$-线性空间. 设对于$0\le i\le n-1$，存在线性映射$f_i\colon V_i\to V_{i+1}$，使得 (i) f_0是单射，f_{n-1}是满射；(ii) 对于$i=0,\cdots,n-2$，均有$\operatorname{Ker}f_{i+1}=\operatorname{Im}f_i$. 证明：$\sum_{i=0}^n(-1)^id_i=0$.

2b、设一组矩阵$\{A_i\in\mathbb{F}^{d_i\times d_{i-1}}|i=1,\cdots,n\}$满足$\operatorname{rank}(A_1)=d_0$，$\operatorname{rank}(A_n)=d_n$，并且

$$\{A_ix|x\in\mathbb{F}^{d_{i-1}\times1}\}=\{x\in\mathbb{F}^{d_i\times1}|A_{i+1}x=0\},\ \forall i=1,\cdots,n-1.$$

求证：$\sum_{i=0}^n(-1)^id_i=0$.

3、(1) 设$f_1,f_2\in\mathbb{F}[x]$，g_1,g_2是f_1,f_2的最大公因式和最小公倍式.

求证：$\operatorname{diag}(f_1,f_2)$与$\operatorname{diag}(g_1,g_2)$在$\mathbb{F}[x]$上相抵.

(2) 求$\operatorname{diag}((x^3-x)^2,(x^2-x)^3,(x^2-1)^4)$在$\mathbb{R}[x]$上的 Smith 标准形.

4、设方阵$A=\begin{pmatrix}B&I_3&I_3\\I_3&B&I_3\\I_3&I_3&B\end{pmatrix}$，其中$B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times3}$.

(1) 证明A可逆，并求A^{-1}. (2) 求A的特征多项式和最小多项式.

5a、设$\mathcal{A}$是有限维复空间的线性变换，$\lambda_1,\cdots,\lambda_t$是它所有的特征值. 证明：$\mathcal{A}$可对角化当且仅当对所有的特征值$\lambda_i$，$\operatorname{Ker}(\mathcal{A}-\lambda_i\mathrm{Id})^2$与$\lambda_i$的特征子空间是同一个空间.

5b、设$\mathbb{R}^2$上线性变换$(x,y)\mapsto(x+y,x)$把双曲线$x^2-y^2=1$映射成双曲线H. 求H的半实轴长和半虚轴长，以及H的实轴和虚轴的方向.

6a、设$\mathbb{F}^{n\times n}$的子空间W中矩阵均可相似对角化，并且乘积可交换. 试证明：$\dim W\le n$.

6b、设$A\in\mathbb{C}^{n\times n}$满足$\det(A+I_n)=1$. 求证：存在$B\in\mathbb{C}^{n\times n}$使得$B^2+2B=A$.