中科大 2023 年秋博资考
几何

1、计算 Φ： $SL(2,\mathbb{R}) \to \mathbb{H} = \{\mathrm{Im}\ \tau > 0\}$

$$\Phi: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \frac{ai+b}{ci+d},$$

Φ 在 $I_2 \in SL(2,\mathbb{R})$ 处的切映射。

2、设 E 是光滑流行 M 的向量丛。

(1) 给出联络 ∇^E 定义，并且证明联络的存在性；

(2) 给出对偶丛 E^* 联络 ∇^{E^*} 定义；

(3) 给出张量丛 $E_1 \otimes E_2$ 联络 $\nabla^{E_1 \otimes E_2}$ 定义；

(4) 证明自同态丛 $\mathrm{End}(E) \simeq E \otimes E^*$ 的联络 $\nabla^{\mathrm{End}(E)}$ 有如下公式成立

$$\nabla^{\mathrm{End}(E)} A = \nabla^E A - A \nabla^E \qquad\qquad A \in \mathrm{End}(E).$$

3、设 M 是一 n 维——紧致光滑流形，f 是 M 上一光滑函数。若 $df|_x = 0$，则称 x 是 f 的临界点。若在坐标卡 $\{U_i, y^i\}$ 下

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^i \partial y^j}\right)_{1 \le i,j \le n}$$

非奇异，则称 x 非退化。

(1) 证明 x 的非退化与坐标选取无关；

(2) 若 f 的临界点都是非退化的，则称 f 是 M 的一个 Moorse 函数。证明: Moorse 函数的临界点是离散的，因此 M 上只有有限个临界点；

(3) 给定 M 上的一个黎曼度量 g，定义 ∇f 为

$$df(\ )=<\nabla f,\ >_g$$

考虑 $-\nabla f$ 生成的单参数子群 φ_t，$t\in\mathbb{R}$。证明：若 f 是 M 的一个 Moorse 函数，则

$$\lim_{t\to\infty}\varphi_t \text{ 存在, 且收敛到 } f \text{ 的一个临界点。}$$

4、证明 $\mathrm{O}(n)$ 是 $GL(n,\mathbb{R})$ 的强形变收缩核。

5、设 K 是一个有限单纯复形。考虑 K 的 $\mathbb{R}$ 系数单纯同调群 $H_n(K;\mathbb{R})$。定义 K 的欧拉式性数为

$$\chi(K)=\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\mathrm{dim}_{\mathbb{R}}H_p(K;\mathbb{R}).$$

若 α_p 是 K 的 p—维单纯形个数。

(1) 证明

$$\chi(K)=\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\alpha_p;$$

(2) 若 K,L 为两个有限单纯复形，$K\cap L$ 是一个单纯子复形。证明

$$\chi(K\cup L)=\chi(K)+\chi(L)-\chi(K\cap L).$$

6、设 P 是 $\mathbb{R}^n$ 中一点，用微分形式写出 P 的闭 $Poincare$ 对偶和紧 $Poincare$ 对偶。

7、若 U, V 是 X 的单连通开集。且 $X=U\cup V$, $U\cap V$ 是单连通。证明 X 单连通。

8、计算亏格为 2 的连通定向闭曲面的 $\mathbb{Z}$ 系数同调群。