

中国科学技术大学期中试卷  
2023-2024 学年泛函分析期中考试

授课教师：刘聪文

考试时间：2023.11.18 19:00-21:00

1. (15 分) 证明：赋范空间的真子空间不含内点
2. (15 分) 设  $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$  是  $[a, b]$  上一列次数不超过  $k$  的多项式，在  $[a, b]$  上一致收敛于函数  $f$ 。证明： $f$  必为多项式
3. (15 分) 证明： $\ell^2$  是一个 Hilbert 空间
4. (15 分) 叙述并证明 Riesz 表示定理
5. (15 分) 有限维赋范线性空间是否一定是 Banach 空间？证明或者举反例说明你的结论
6. (15 分) 可分度量空间的完备化是否一定可分？证明或者举反例说明你的结论
7. (10 分) 设  $X, Y$  是两个度量空间，其中  $Y$  是列紧空间。  $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  连续。定义

$$g(x) := \inf\{f(x, y) : y \in Y\}, x \in X.$$

证明： $g: X \rightarrow \mathbb{R}$  连续