问题 1 (每问 3 分, 满分 30 分)

下面是讲义中一个定理及其证明的一部分：

定理 3.3.6. (正则区间形变定理)

对于 $a<b$，假设 $f^{-1}([a,b])$ 是紧集，并且每个 $c\in[a,b]$ 是 f 的正则值，则存在微分同胚 $\varphi: M\to M$ 使得 $\varphi(M^a)=M^b$.

证明 将 M 嵌入欧氏空间 (或者任意赋予 M 一个黎曼度量 $\langle\cdot,\cdot\rangle$)，从而在每个切空间 T_pM 上都给出一个内积. 按照以下方式定义 M 上的向量场 ∇f (称为 f 关于该度量的梯度向量场),

$$\langle\nabla f, X_p\rangle = df_p(X_p) = X_p(f), \qquad \forall X_p\in T_pM.$$

因为 f 的临界点集合是闭集, 可以找到一个不含临界点的开集 U 使得 $f^{-1}([a,b])\subset U$.
因为 $f^{-1}([a,b])$ 是紧集，可取紧支光滑鼓包函数 h，使得

$$\mathrm{supp}(h)\subset U, \quad 并且 \quad 在 f^{-1}([a,b]) 上有 h=1.$$

因为在 U 中有 $df\neq 0$, 所以在 U 中有 $\nabla f\neq 0$, 从而

$$X := \frac{h}{\langle\nabla f,\nabla f\rangle}\nabla f$$

是流形 M 上良好定义的紧支光滑向量场. 令 φ_t 为 X 生成的流. 那么 f 的拉回函数 $\varphi_t^* f$

(1) 这段文字中标记了 7 个划线的词，即“正则值”，“微分同胚”，“向量场”，“临界点”，“紧支光滑鼓包函数”，“流”以及“拉回函数”. 分别写出它们的定义.

(2) 证明过程中标记了 3 个方框，分别是“将 M 嵌入欧氏空间”、“可取紧支光滑鼓包函数 h 使得 $\mathrm{supp}(h)\subset U$ 且在 $f^{-1}([a,b])$ 上有 $h=1$”以及“令 φ_t 为 X 生成的流”，它们为什么成立？分别写出它们背后所用的定理或命题的完整陈述.

(3) 该证明过程中漏证了什么事情？(写出即可得分，无需证明)

问题 2 (每问 2 分, 满分 20 分)

判断题. 请在以下正确的陈述前打勾，错误的陈述前打叉.

( ) 任意连通拓扑流形都是道路连通的.

( ) $\mathbb{RP}^2 \times \mathbb{RP}^2$ 是可定向流形.

( ) 切丛 TS^3 微分同胚于 $S^3 \times \mathbb{R}^3$.

( ) 逆紧 (proper) 单射浸入是嵌入.

( ) 若 $S \subset N$ 是浸入子流形，$f : M \to N$ 是光滑映射，且 $f(M) \subset S$，则 $f : M \to S$ 是光滑映射.

( ) 设 $f : M \to M$ 是光滑映射，则它的图 $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in M\}$ 与对角线 $\Delta = \{(x, x) \mid x \in M\}$ 横截相交当且仅当对于 f 的任意不动点 p，映射 df_p 的特征值都不是 1.

( ) 对于 M 的余维数为 r 的光滑子流形 S，一定存在光滑函数 $f \in M \to \mathbb{R}^r$ 使得 0 是 f 的正则值，且 $f^{-1}(0) = S$.

( ) 若 m 维光滑流形 M 上存在一个只有两个临界点的 Morse 函数，则 M 微分同胚于球面 S^m.

( ) Lie 群 G 上的任意光滑向量场都是完备的.

( ) m 维紧致连通可交换 Lie 群一定同构于环群 $\mathbb{T}^m$.

( ) 流形 M 上完备向量场的积分曲线映射 $\gamma : \mathbb{R} \to M$ 一定是浸入.

问题 3 (15 分)

记 $\mathcal{H}$ 为所有 2×2 复 Hermitian 矩阵 (即满足 $\overline{A}^T = A$) 组成的线性空间. 对于任意实数 λ_1, λ_2，令

$$\mathcal{M}_{\lambda_1,\lambda_2} = \{A \in \mathcal{H} \mid A\text{的特征值是}\lambda_1, \lambda_2\}.$$

下设 $\lambda_1 < \lambda_2$. 记 $F: \mathcal{H} \to \mathbb{R}^2$ 为 $F(A) = (\mathrm{tr}(A), \det A)$.

(1) 证明 $\mathcal{H}$ 是一个光滑流形，并求其维数.

(2) 利用映射 F，证明 $\mathcal{M}_{\lambda_1,\lambda_2}$ 是一个光滑流形，并求其维数.

(3) 求 $\mathcal{M}_{\lambda_1,\lambda_2}$ 在对角阵 $D_{\lambda_1,\lambda_2} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ 处的切空间 (并写成 $\mathcal{H}$ 的子空间的形式).

问题 4 (10 分)

考虑 $\mathbb{R}^3$ 的两个向量场

$$X = y\frac{\partial}{\partial y}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial z}.$$

(1) 计算 $[X, Y]$.

(2) 设 f 是 $\mathbb{R}^3$ 上的光滑函数，且 $Xf = Yf = 0$. 求证：f 是常数.

问题 5 (15 分)

设 M 是嵌入 $\mathbb{R}^N$ 的 k 维光滑流形.

(1) 写出 Sard 定理的完整表述.

(2) 求证：对于 $d < N - k$，$\mathbb{R}^N$ 中存在跟 M 不相交的 d 维仿射子空间

(3) 当 $d = N - k$ 时结论成立吗？证明或者举出反例.

问题 6 (15 分)

(1) 写出光滑流形上单位分解的定义.

(2) 证明：任意紧流形 M 上都存在光滑向量场 X，它在任意开集上都不恒为 0.

(3) 去掉上述结论中的紧性条件，即证明任意流形 M 上都存在光滑向量场 X，它在任意开集上都不恒为 0.

问题 7 (20 分)

设 G, H 是连通李群，其 Lie 代数分别是 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{h}$，$\varphi: G \to H$ 是 Lie 群同态.

(1) 证明：若 $d\varphi: \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ 是满射，则 φ 是满射.

(2) 举出例子：$d\varphi: \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ 是双射，而 φ 不必是双射.

(3) 证明：若 $d\varphi: \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ 是双射，则 φ 是复叠映射 (即：任意 $h \in H$，存在 h 的开邻域 V_h 以及每个 $g \in \varphi^{-1}(h)$ 的开邻域 U_g，使得所有这些 U_g 两两不交，且每个 $\varphi|_{U_g}: U_g \to V_h$ 是同胚).

(4) 在证明 (1) 的过程中，哪个条件是多余的？

问题 8 (10 分)

证明：对于任意 m 维光滑紧流形 M，存在光滑映射 $\phi: M \to \mathbb{R}^{2m-1}$，它在有限个点之外是浸入.