

中国科学技术大学期中试卷  
2023-2024 学年微分几何期中考试

授课教师：许小卫

考试时间：2023.11.12 19:30-21:30

1. 已知  $\mathbf{r}(s)$  是  $E^3$  中以弧长为参数的正则曲线，写出 *Frenet* 标架的构造过程及运动方程.

2. 求曲线  $\mathbf{r}(s) = \left( \frac{(1+s)^{\frac{3}{2}}}{3}, \frac{(1-s)^{\frac{3}{2}}}{3}, \frac{s}{\sqrt{2}} \right)$  ( $-1 < s < 1$ ) 的曲率、挠率及

*Frenet* 标架的运动方程.

3. 求曲率  $\kappa(s) = \frac{1}{\sqrt{9-s^2}}$  的平面曲线，其中  $s$  是弧长参数.

4. 判断曲线  $\mathbf{r}(t) = (t + \sqrt{3} \sin t, 2 \cos t, \sqrt{3}t - \sin t)$  与曲线

$\tilde{\mathbf{r}}(t) = \left( 2 \cos \frac{t}{2}, 2 \sin \frac{t}{2}, -t \right)$  是否合同，并证明之.

5. 写出曲面在自然标架下 *Weingarten* 变换的定义，矩阵表示，并用

*Weingarten* 变换  $\mathcal{W}$  给出 *Gauss* 曲率  $K$ 、平均曲率  $H$ 、主曲率  $k_1$ 、 $k_2$  的定义及具体表达式.

6. 写出标准旋转环面的参数方程，并计算其第一基本形式  $I$ 、第二基本形式

$II$ 、*Gauss* 曲率  $K$ 、平均曲率  $H$ .

7. 已知  $\Sigma$  是  $E^3$  中正则曲面， $\mathbf{n}$  是  $\Sigma$  单位法向量场，称  $g: \Sigma \rightarrow S^2, p \mapsto \mathbf{n}(p)$

为曲面  $\Sigma$  的 *Gauss* 映射，其中  $S^2$  是  $E^3$  中单位球面.

求曲面  $\mathbf{r}(u, v) = (3u + 3uv^2 - u^3, v^3 - 3v - 3u^2v, 3(u^2 - v^2))$ ,  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$

在 *Gauss* 映射下的像集  $g(\Sigma)$ .

8. 求所有形如  $\mathbf{r}(u, v) = (u, v, f(u) + g(v))$  且平均曲率  $H = 0$  的曲面