微分几何测试题　　2023年11月12日14:30——16:30

1 (10分). 计算平面曲线$\mathbf{r}(t)=(a\cos t, b\sin t), a>b>0$,的曲率.

2 (20分=10+10). 记$\mathbb{R}^3$中以原点为中心的单位球面为$\mathbb{S}^2$. 设$\mathbf{r}(s)$是位于$\mathbb{S}^2$上的弧长参数曲线.令$\mathbf{a}(s)=\mathbf{r}(s), \mathbf{b}(s)=\dot{\mathbf{r}}(s), \mathbf{c}(s)=\mathbf{r}(s)\wedge\dot{\mathbf{r}}(s)$, 以及$\lambda(s)=\langle\dot{\mathbf{b}}(s), \mathbf{c}(s)\rangle$.

(1) 计算标架$\{\mathbf{a}(s), \mathbf{b}(s), \mathbf{c}(s)\}$的运动方程,即以$\{\mathbf{a}(s), \mathbf{b}(s), \mathbf{c}(s)\}$表示$\{\dot{\mathbf{a}}(s), \dot{\mathbf{b}}(s), \dot{\mathbf{c}}(s)\}$.

(2) 计算$\mathbf{r}(s)$的曲率$\kappa(s)$与挠率$\tau(s)$(用函数$\lambda(s)$来表示).

3 (10分). 求曲面$\mathbf{r}(x,y)=(x,y,f(x,y))$的第一基本形式和第二基本形式.

4 (30分=10+10+10).

(1) 设曲面$\mathbf{r}(u,v)$第一基本形式与第二基本形式分别为

$$\mathrm{I}=Edudu+2Fdudv+Gdvdv, \quad \mathrm{II}=Ldudu+2Mdudv+Ndvdv.$$

推导曲面平均曲率与高斯曲率关于E,F,G,L,M,N的表达式.

(2) 计算曲面$\mathbf{r}(u,v)=(u\cos v, u\sin v, 2v)$的平均曲率与高斯曲率.

(3) 判断并证明曲面$\mathbf{r}(u,v)=(u\cos v, u\sin v, 2v)$是否为直纹面? 是否为可展曲面?

5 (30分=10+10+10) 设$\mathbf{C}$为曲面S上一条正则曲线. 如果$\mathbf{C}$在各点的切向量都是曲面的一个主方向,则称$\mathbf{C}$为一条曲率线.

(1) 设曲面S无脐点.证明S的参数曲线$u=$常数和$v=$常数是曲率线的充要条件是$F=M=0$.

(2) 设$\mathbf{C}(s)$为曲面S上一条弧长参数的曲率线. 求$\mathbf{C}(s)$上各点处曲面法线生成的直纹面(正则部分)的高斯曲率.

(3) 设$\mathbf{C}(s)$为曲面S上一条弧长参数的曲率线, 并且$\mathbf{C}(s)$上各点处的副法向量$\mathbf{b}$与曲面在该点的法向量$\mathbf{N}$成定角. 判断并证明:$\mathbf{C}(s)$是否是一条平面曲线?