中国科学技术大学 2023～2024 学年第 1 学期

微分几何期末试卷

姓 名 ________________ 学 号 ________________ 学 院 ________________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

一、【14分】设曲面$S: \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$的第一基本形式为 $\mathrm{I}=Edudu+2Fdudv+Gdvdv$，求Christoffel符号 Γ_{12}^2.

二、【16分】设$\{\boldsymbol{r}\,;e_1,e_2,e_3\}$为曲面$S: \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$的一个正交标架, 其中$e_3$为曲面$S$的单位法向量场. 设$\bar{e}_1=\cos\theta e_1+\sin\theta e_2$, $\bar{e}_2=-\sin\theta e_1+\cos\theta e_2$, $\bar{e}_3=e_3$，其中$\theta=\theta(u,v)$为任意可微函数. 记 $\omega^i:=\langle d\boldsymbol{r},e_i\rangle$, $\bar{\omega}^i:=\langle d\boldsymbol{r},\bar{e}_i\rangle$, $\omega_i^j:=\langle de_i,e_j\rangle$, $\bar{\omega}_i^j:=\langle d\bar{e}_i,\bar{e}_j\rangle$. 求: $\bar{\omega}_1^2-\omega_1^2$ 与 $(\bar{\omega}^1\bar{\omega}_2^3-\bar{\omega}^2\bar{\omega}_1^3)-(\omega^1\omega_2^3-\omega^2\omega_1^3)$.

三、【18分】是否存在曲面分别以如下ϕ_1,ϕ_2为第一、第二基本形式? 说明理由.

(1) $\phi_1=dudu+dvdv$, $\phi_2=dudu+3dvdv$;

(2) $\phi_1=dudu+dvdv$, $\phi_2=-dudu$;

(3) $\phi_1=4\cos^2 v dudu+dvdv$, $\phi_2=dudu+4\cos^2 v dvdv$. $(\cos v>0)$.

四、【12分】设曲面S的主曲率k_1,k_2为光滑函数, 曲面参数(u,v)使得$\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v$分别为主曲率$k_1$, k_2对应的主方向. 设曲面一点P_0处$k_1(P_0)>k_2(P_0)$, 且P_0为k_1的局部极大值点,为k_2的局部极小值点.

(1) 记曲面S的第一,第二基本形式分别为$\mathrm{I}=Edudu+Gdvdv, \mathrm{II}=Ldudu+Ndvdv$. 求解$k_1,k_2$的表达式以及$\frac{\partial E}{\partial v}(P_0)$, $\frac{\partial G}{\partial u}(P_0)$的数值.

(2) 证明: P_0处的Gauss曲率$K(P_0)\le 0$.

五、【10分】判断曲面$\boldsymbol{r}(u,v)=(u\cos v,u\sin v,\log u)$与$\tilde{\boldsymbol{r}}(x,y)=(x\cos y,x\sin y,y)$是否等距，并证明之.

六、【10分】在单位球面S^2上，求在$P_0=\frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,1)$处的切向量$v=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1,0,1)$沿着曲线$\gamma(t)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos t,\sin t,1)$ （$t\in[0,2\pi]$）平行移动回到P_0处的切向量v'.

七、【10分】求曲面$\boldsymbol{r}(u,v)=(u\cos v,u\sin v,v)$上的测地线.

八、【10分】已知$\gamma(s)$是R^3中以弧长为参数的光滑闭曲线，曲率$k(s)>0$. 若其主法向量在单位球面上轨迹是简单闭曲线，并把球面分成两部分. 求：这两部分的面积比.

参考公式：

(1) 正交参数系Gauss方程

$$-\frac{1}{\sqrt{EG}}\{(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}})_v+(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}})_u\}=\frac{LN-M^2}{EG}.$$

(2) 正交参数系Codazzi方程

$$\begin{cases}(\frac{L}{\sqrt{E}})_v-(\frac{M}{\sqrt{E}})_u-N\frac{(\sqrt{E})_v}{G}-M\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{EG}}=0,\\ \\ (\frac{N}{\sqrt{G}})_u-(\frac{M}{\sqrt{G}})_v-L\frac{(\sqrt{G})_u}{E}-M\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{EG}}=0.\end{cases}$$

——————————————从此线以下开始答题——————————————