装订线 答题时不要超过此线

中国科学技术大学
2023–2024学年代数几何初步
期末考试

姓名：________________　　学号：________________

题号	1	2	3	4	总分
得分					

注意：除定理公式所涉及的人名等专有词汇，请使用**中文**。

两道题目之间是相互独立的。答题中后面的问题可以使用前面问题的结论，无论答题人是否已经得到正确的证明或答案。

请在试卷上答题。如试卷上答题空间不足，可将答案写在专门的空白纸（作为答题纸）上，但应标明题号，并注明姓名和学号。

考试结束时，请交试卷和答题纸，草稿纸不用交。考试过程中，如有不明确之处，请先举手示意再提问，切勿喧哗！

本试卷中作如下约定：

- “代数簇”指复数域上的拟射影簇。
- 如需使用课堂中的定理，可使用“**由课上定理知**”作提示词。定理有专有名称的，也可使用专有名称作提示词。
- 如需使用作业中的结论，可使用“**由作业结论知**”作提示词。
- 除去课堂以及作业中的结果，使用其它书中的定理时，需给出定理的详细证明。

1. （30分，每小题6分）下面的说法是否正确？无需证明。

   (i) 集合$\{(X,Y,Z)\in\mathbb{C}^3 : XYe^Z=0\}$是一个仿射代数集。

   (ii) 设$X=V(I)$和$Y=V(J)$是$\mathbb{C}^n$中的两个闭代数子集，其中I,J是n元多项式环$\mathbb{C}[X_1,\cdots,X_n]$中的两个理想。若$X\subset Y$，则$I\supset J$。

   (iii) 设X是一个代数簇，Y是X的真子簇，则$\dim Y<\dim X$。

(iv) 设X, Y是两个仿射簇，$\phi : X \to Y$是一个态射。若$\phi^* : \Gamma(Y) \to \Gamma(X)$是双射，则$\phi$是一个同构。

(v) 设X, Y是两个1维射影簇，$\phi : X \to Y$是一个非常值态射，则ϕ是一个有限态射。

解：

(i) 正确。此集合就是$V(XY) \subset \mathbb{C}^3$，因为$e^Z$恒不为0。

(ii) 错误。比如$I = (X_1^2), J = (X_1)$，则$X = Y$，但$I \not\supseteq J$。

(iii) 错误。如果Y是X中的非空开集，则$\dim Y = \dim X$。如果Y是X中的真闭子簇，则$\dim Y < \dim X$。

(iv) 正确。这是作业题。

(v) 正确。因为ϕ是非常值的，它的每一根纤维都是X的真闭子集，而X是1维的，从而，每一根纤维都是有限点集。

评分标准：每小题6分，答案正确的得6分，不正确的得0分。

2. （10分）设X, Y是$\mathbb{C}^2$中的两条曲线，

$$X = V(y - x^2), \qquad Y = V(xy - 1),$$

其中x, y是$\mathbb{C}^2$上的仿射坐标。证明：X与Y不同构。

证明：X, Y都是仿射簇，它们的坐标环为

$$\Gamma(X) = \mathbb{C}[x, y]/(y - x^2) \cong \mathbb{C}[x], \qquad \Gamma(Y) = \mathbb{C}[x, y]/(xy - 1) \cong \mathbb{C}[x, x^{-1}].$$

X与Y同构$\Longleftrightarrow \Gamma(X)$与$\Gamma(Y)$作为$\mathbb{C}$-代数同构。

但$\mathbb{C}[x]$与$\mathbb{C}[x, x^{-1}]$不可能$\mathbb{C}$-代数同构。这是因为$\mathbb{C}[x]$的单位元集合为$\mathbb{C}$，而$\mathbb{C}[x, x^{-1}]$的单位元集合为$\mathbb{C} \cup \{x^n : n \in \mathbb{Z}\}$。

另外，还可以使用其它方法证明，比如：证明X与$\mathbb{C}$同构，Y与$\mathbb{C}^*$同构，然后说明$\mathbb{C}$与$\mathbb{C}^*$不同构。

如何证明$\mathbb{C}$与$\mathbb{C}^*$不同构？可以像上面那样使用坐标环论证，也可以使用拓扑方法：如果$\mathbb{C}$与$\mathbb{C}^*$同构，那么它们在经典拓扑下应是同胚的，然而，在经典拓扑下$\mathbb{C}$是单连通的，而$\mathbb{C}^*$不是单连通的，从而$\mathbb{C}$与$\mathbb{C}^*$不同胚。

评分标准：能够把问题约化为$\Gamma(X)$与$\Gamma(Y)$或者$\mathbb{C}$与$\mathbb{C}^*$不同构的问题，得8分。能具体证明$\Gamma(X)$与$\Gamma(Y)$或者$\mathbb{C}$与$\mathbb{C}^*$不同构的，过程正确的再得2分，过程不正确的再得1分。只说明$\Gamma(X)$与$\Gamma(Y)$或者$\mathbb{C}$与$\mathbb{C}^*$不同构，但未作具体论证的，总分得8分。

3. 设$X=V(x^2-yz,xz-xw)$是$\mathbb{P}^3$中的射影集，其中$[x:y:z:w]$是$\mathbb{P}^3$上的齐次坐标。

(i) （15分）求X的不可约分解。

(ii) （5分）求$\dim X$。

(iii) （10分）求$\mathrm{Sing}(X)$。

解：按定义，我们有

$$\begin{aligned} X &= V(x^2-yz,xz-xw) \\ &= V(x^2-yz,x(z-w)) \\ &= V(x^2-yz,x)\cup V(x^2-yz,z-w) \\ &= V(yz,x)\cup V(x^2-yz,z-w) \\ &= V(x,y)\cup V(x,z)\cup V(x^2-yz,z-w). \end{aligned}$$

记

$$X_1=V(x,y)\cong\mathbb{P}^1,\qquad X_1=V(x,z)\cong\mathbb{P}^1,\qquad X_3=V(x^2-yz,z-w).$$

显然X_1,X_2都是不可约的且是光滑的。下面证明$X_3\cong\mathbb{P}^1$，从而X_3也是光滑不可约的。

实际上，考虑$X_3'=V(x^2-yz)\subset\mathbb{P}^2$，以及态射

$$\phi':X_3'\to X_3,\qquad [x,y,z]\mapsto[x,y,z,z].$$

则ϕ'是同构，其逆态射为

$$(\phi')^{-1}:X_3\to X_3',\qquad [x,y,z,w]\to[x,y,z].$$

再考虑态射

$$\phi'':\mathbb{P}^1\to X_3',\qquad [s,t]\mapsto[st,s^2,t^2].$$

则ϕ''也是同构，其逆态射为

$$(\phi'')^{-1}:X_3'\to\mathbb{P}^1$$

$$(\phi'')^{-1}([x,y,z])=\begin{cases}[y,x], & 若y\neq 0;\\ [x,z], & 若z\neq 0.\end{cases}$$

显然，X_1,X_2,X_3两两互不包含。因此，有

(i) X的不可约分解为

$$X=V(x,y)\cup V(x,z)\cup V(x^2-yz,z-w).$$

(ii) $\dim X=1$。

(iii) 由于X_1,X_2,X_3都是光滑的，所以，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Sing}(X) &= (X_1 \cap X_2) \cup (X_1 \cap X_3) \cup (X_2 \cap X_3) \\
&= \{[0,0,0,1]\} \cup \{[0,0,1,1]\} \cup \{[0,1,0,0]\} \\
&= \{[0,0,0,1],[0,0,1,1],[0,1,0,0]\}.
\end{aligned}
$$

评分标准：

(i) 3个不可约分支，每个5分。对每个不可约分支，能给出关键细节，结果正确的得5分；结果正确，但细节有明显错误的，得3-4分；只给出正确结果，没有细节的，得2分。

(ii) 此题5分。结果正确得得5分，结果错误的得0分。但结果正确过程特别荒谬的，得2分。

(iii) 能指出$\mathrm{Sing}(X)$是不同连通分支交集之并的，得5分。$\mathrm{Sing}(X)$的具体结果占5分，结果完全正确的得5分，结果不完全正确的（包括：只有一个点正确的，两个点正确的；给出三个正确的点，但还给出其它点的）得2分；结果完全正确，但过程有明显错误的，得4分。

4. 设X是一个代数簇，U,V是X中的两个非空开集。

(i) （10分）证明：$U\cap V$是X中的非空开集。

(ii) （10分）设$i_U : U\cap V \to U$，$i_V : U\cap V \to V$是两个自然嵌入。证明：$i=(i_U,i_V):U\cap V\to U\times V$是一个闭嵌入。

(iii) （10分）证明：若U,V都是X中的仿射开集，则$U\cap V$也是X中的仿射开集。

证明：

(i) 首先，$U\cap V$是X中的开集；

其次，$U\cap V\neq\emptyset$。实际上，若$U\cap V=\emptyset$，则$X=(X\setminus U)\cup(X\setminus V)$。由于$U,V$都是非空开集，$X\setminus U, X\setminus V$都是$X$的真闭子集。这与$X$的不可约性相矛盾！

(ii) 设$\Delta_X\subset X\times X$是$X\times X$中的对角线，即

$$\Delta_X=\{(x,x)\in X\times X : x\in X\}.$$

则课堂结论知，Δ_X是$X\times X$中的闭集，并且$i(U\cap V)=(U\times V)\cap\Delta_X$。

令$W=i(U\cap V)$，则W是$U\times V$中的闭集。

令$p_1 : U\times V\to U$是关于第一个分量的投影。则$p_1(W)=U\cap V$。由于i,p都是态射，$i:U\cap V\to W$是一个同胚。

由（i）知，$U\cap V$是X中的非空开集，从而，它是不可约的，故W是$U\cap V$中的闭子簇，并且$i:U\cap V\to W$以及$p_1:W\to U\cap V$是互逆的态射。

于是，$i:U\cap V\to U\times V$是$U\cap V$到$U\times V$的闭子簇上的嵌入，从而，i是一个闭嵌入。

(iii) 首先，由（i）知，$U\cap V$是X中的非空开集，只需证明$U\cap V$同构于一个仿射簇。

注意到，如果U,V都是仿射簇，由课堂结果知，$U\times V$也是一个仿射簇。由（ii）以及$U\cap V$的不可约性知，$U\cap V$同构于$U\times V$中的一个闭子簇，从而，$U\cap V$同构于一个仿射簇。

评分标准：

(i) 核心点在于X的不可约性。答案中有此核心点且过程无重大缺陷的，得10分；无此核心点的，得0-4分。有此核心点，但缺少关键细节的，得9分。

(ii) 核心点在于$U\cap V=(U\times V)\cap\Delta_X$。答案中有此核心点且过程无重大缺陷的，得10分；无此核心点的，得0-4分。证明i是闭态射的，至多得5分。证明i是嵌入+闭态射的，至多得5分。

(iii) 核心点在于$U\cap V$同构于一个仿射簇。答案中有此核心点且过程无重大缺陷的，得10分；无此核心点的，得0-4分。证明$U\cap V$上有仿射坐标的，至多得2分。