中国科学技术大学期末试卷
2022-2023 学年第一学期　A卷

课程名称: 拓扑学(H)　　. 课程编号: 001707

考试时间:2023年2月28日 8：30-10：30　　考试形式: 闭卷

学生姓名: ______　　学　　号: ______

1.（每题4分）请判断下列陈述是否正确：

(1) 假设$f: X \to Y$是一个映射，$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$对所有$X$的子集$A$成立,那么$f$一定是连续的；

(2) 存在从$[0,1]$到开圆盘$\{(x,y): x^2+y^2<1\}$的连续满射；

(3) 欧式空间里连通的闭集一定道路连通；

(4) $GL(n,\mathbb{R})$是连通的拓扑群；

(5) 可缩的空间一定是单连通的；

(6) 从闭圆盘$\{(x,y): x^2+y^2 \le 1\}$到自己的连续映射一定存在不动点；

(7) 如果$f: |X| \to |Y|$是两个单纯复形之间的连续映射，那么一定存在f的单纯逼近$s: |X| \to |Y|$；

(8) 所有树的欧拉示性类相同；

(9) 射影空间$\mathbb{RP}^2$和加上一个把手的Klein瓶同胚；

(10) 所有和球面同伦的曲面一定和球面同胚。

2. 假设X是紧致的度量空间，Y也是度量空间，$f: X \to Y$是连续映射。

(1) (10分)请叙述紧致、度量空间、度量空间的拓扑、连续映射、一致连续的定义。

(2) (10分)证明f的一致连续性。

3.

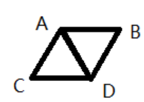

图 1: 第三题图片

(1) （5分）将上图中的AB边和CD边粘起来，AC边和BD边粘起来得到一个空间X，请问如何给出X的三角剖分？

(2) （5分）证明$\mathbb{C}$上的加法给出了一个拓扑群结构$(\mathbb{C},+)$，$\Lambda = \{m + ne^{\pi i/3}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}\}$是$(\mathbb{C},+)$的子群, 以及$\mathbb{C}/\Lambda$和$X$同胚。

(3) （5分）X是否道路连通？如果是，请写出X的基本群，本小题无需证明。

(4) （5分）证明X和$X \times [0,1]$ 同伦。

(5) （5分）同伦空间是否具有相同的连通性、道路连通性和基本群？本小题无需证明。

(6)（5分）在$X\times[0,1]$ 中，将$X\times\{0\}$的ACD三角形和$X\times\{1\}$的ADB三角形粘起来，将$X\times\{0\}$的ADB三角形和$X\times\{1\}$的CDA三角形粘起来得到一个空间Y。假设$f:X\times[0,1]\to Y$为粘合映射。定义$Z=f((X\times[0,1/2])\cup(\{A\}\times[0,1]))$, $W=f(X\times[1/2,1])$，请问Z的基本群、W的基本群、$Z\cap W$的基本群和$Z\cup W$的基本群是什么关系？本小题无需证明。

(7)（10分）利用上述步骤计算Y的基本群。