# 中国科学技术大学2022年春
# 《复分析》期末考试试卷

2022年6月16日

姓名：________　　系别：________　　学号：________

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | | | |

一 （15 分）判断下列命题的真伪并说明理由.

(1) 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径为 1, 则存在 $z_0 \in \mathbb{C}$, $|z_0| = 1$ 使得 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ 发散;

(2) $f(z) = z^4 - 3z - 1$ 在 $|z| < 1$ 中有 4 个零点;

(3) 定义在实轴上的实函数 $f(x) = \sqrt{x^2}$ 不能解析开拓到复平面上.

二 （20 分）计算

(1) $\mathrm{Res}\left(\frac{\sin z}{z^{2022}}, 0\right)$;

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{x^p dx}{1+x^2}$, 其中 $-1 < p < 1$.

三 （15 分）求把区域 $D = \{z : |z| < 1, |z - \frac{i}{2}| > \frac{1}{2}\}$ 变为单位圆盘的共形映射.

四 （15 分）设 $D = \{z : |z| < 2\}$, $f : D \to \mathbb{C}$ 全纯且满足

(1) 当 $|z| = 1$ 时, $|f(z)|$ 为常数;

(2) 当 $|z| < 1$时, $f(z) \neq 0$.

证明 $f$ 为常值函数.

五 （15 分）设 $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. 求函数

$$f(z) := \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{1 - a_k z}$$

在原点处 Taylor 展式的收敛半径, 并证明:

$$\limsup_{n\to+\infty} \left|\sum_{k=1}^{m} a_k^n\right|^{1/n} = \max_{1\le k\le m} |a_k|.$$

六 （10 分）设 $p(z) = z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$ 在单位圆盘中是单叶的，证明：$|a_n| \le \frac{1}{n}$.

七 （10 分）证明或否定: 对每个正整数 $n$, 存在整函数 $f_n$ 满足

$$\max_{1\le|z|\le2} |\mathrm{Re}\, f_n(z) - \log|z|| < \frac{1}{n}.$$