代数数论　2022 春

考试时间：**19:00-21:30**

1. 令 $f(x) = x^3 + 6x + 12$, α 为 $f(x)$ 的一个根, $K = \mathbb{Q}(\alpha)$.

   (i) 证明 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约并计算 $f(x)$ 的判别式.

   (ii) 计算 $p = 2, 3, 5$ 在 K 中的理想分解情况.

2. 令 K 为 $\mathbb{Q}(\zeta_9)$ 的极大实子域.

   (i) 计算 K 的扩张次数和判别式.

   (ii) 对所有的素数给出其在 K 中的理想分解.

3. 计算二次域 $\mathbb{Q}(\sqrt{10})$ 的整数环, 类数和基本单位.

4. 设 $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 为一非零整系数多项式, 假设对几乎~~所有的素数 p, $f(x)$~~ 模 p 后完全可约 (即分解成一次因式的乘积), 证明 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上完全可约.

5. (i) 证明素数 p 可以写成 $x^2 + 5y^2$, 其中 x, y 是整数, 当且仅当 $p = 5$ 或 $p \equiv 1, 9 \mod 20$.

   (ii) 证明任意两个模 20 余 3, 7 的素数的乘积可以表成 $x^2 + 5y^2$.

6. 令 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-17})$.

   (i) 证明 $\mathrm{Cl}_K \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

   (ii) 证明 K 的希尔伯特类域是 $H_K = K(\sqrt{(1+\sqrt{17})/2})$.

7. 对正整数 m, 令 $\zeta_m = e^{2\pi i/m}$, ℓ 为一素数, 证明

   (i)
$$\mathrm{N}_{\mathbb{Q}(\mu_{m\ell})/\mathbb{Q}(\mu_m)}(1 - \zeta_{m\ell}) = \begin{cases} 1 - \zeta_m & 若 \ell \mid m \\ \frac{1-\zeta_m}{1-\zeta_m^{\ell^{-1}}} & 若 \ell \nmid m 且 m > 1 \\ \ell & 若 m = 1 \end{cases}$$

   (ii) 若 m 为合数, 证明 $1 - \zeta_m$ 是环 $\mathbb{Z}[\zeta_m]$ 一个单位.

   (iii) 若 $m = p^n$ 为一素数的方幂, 令 $K = \mathbb{Q}(\zeta_{p^n})^+$ 是 $\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})$ 的极大实子域. 证明对任意的整数 $1 \le a < \frac{1}{2}p^n$ 且 $(a, p) = 1$, 元素
$$\xi_a = \zeta_{p^n}^{(1-a)/2} \frac{1 - \zeta_{p^n}^a}{1 - \zeta_{p^n}}$$
   是 K 的一个单位.

   (iv) 令 C_K 是由 -1 和所有 ξ_a, $1 < a < \frac{1}{2}p^n$, $(a, p) = 1$ 生成的 $\mathcal{O}_K^\times$ 的子群, 这里 $K = \mathbb{Q}(\zeta_{p^n})^+$. 已知有如下等式
$$\det\left(\log|\xi_a^\tau|\right)_{a,\tau \ne 1} = \pm \prod_{1 \ne \chi \in \widehat{G}} \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma) \log|1 - \zeta_{p^n}^a|$$
   证明 $[\mathcal{O}_K^\times : C_K] = h_K$, 特别的这个指数有限. 这里 $G = \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$, $\sigma, \tau \in G$, $\widehat{G}$ 是 G 的特征群.

8. (i) 证明 $\mathbb{A}_\mathbb{Q}^\times = \mathbb{Q}^\times \times \mathbb{R}_+^\times \times \widehat{\mathbb{Z}}^\times$.

   (ii) 构造一个非平凡加法特征 $\mathbb{A}_\mathbb{Q}/\mathbb{Q} \to \mathbb{C}^\times$.