中国科学技术大学《代数学基础》期中考试

2022年11月20日，15:00–17:00

姓名：____________ 学号：____________ 所在院系：____________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									
复查									

一、(15分) 设 $(G,\cdot)$ 是群，A 是群 G 的子群。在 G 上定义关系 $\sim$：对任意 $g,h\in G$, $g\sim h \Leftrightarrow g^{-1}\cdot h\in A$. 则 $\sim$ 是 G 上的等价关系，并求 G 中元素 g 在等价关系 $\sim$ 下的等价类。

二、(15分)

(1) 求 243 和 198 的最大公因子和最小公倍数；

(2) 求二元一次不定方程 $243x + 198y = 909$ 的全部整数解。

三、（共10分） 判断一次同余方程组

$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{8} \\ x \equiv 11 \pmod{20} \\ x \equiv 1 \pmod{15} \end{cases}$$

是否有解？如果有解，那么求解该方程组。

四、(10分) 设 n 为大于 1 的任意正整数，则

(1) $n \nmid (2^n - 1)$;

(2) $n | \varphi(2^n - 1)$, 其中 $\varphi(\cdot)$ 为欧拉函数。

五、(10分)

(1) 解一次同余方程 $3^{2022} \cdot x \equiv 6 \pmod{23}$.

(2) 分别求出模 $23, 23^2$ 和 2×23^2 的一个原根。

六、群论中的拉格朗日定理(15分)

(1) 设 $(G,\cdot)$ 是有限群以及 A 是群 G 的子群，则子群 A 的阶整除群 G 的阶。

(2) 对 $g\in G$, 使得 $g^n=1$ 成立的最小正整数 n 称为元素 g 的阶，则元素 g 的阶整除群 G 的阶；

(3) 利用群论中的拉格朗日定理证明欧拉定理。

七、(15分)

(1) 利用威尔逊(Wilson)定理证明费马小定理；

(2) 利用费马小定理证明威尔逊定理；

(3) 若奇素数 $p > 3$, 则

$$p^2 | \sum_{i=1}^{p-1} \frac{(p-1)!}{k}.$$

八、(10分)

(1) 无零因子的含幺交换环称为整环。证明：有限整环是域。

(2) 若 $k \geq 3$, 则 $\{(-1)^a 5^b | a = 0, 1 \text{ 和 } 0 \leq b < 2^{k-2}\}$ 是模 2^k 的缩系，并且

$$(\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z})^* \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^{k-2}\mathbb{Z}.$$