2022 秋高等概率论 · 王世花（回忆版）

1. 随机变量

$\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为随机变量，求证以下的均为随机变量。

$\sup_{n\in\mathbb{N}} X_n$, $\inf_{n\in\mathbb{N}} X_n$, $\limsup_{n\in\mathbb{N}} X_n$, $\liminf_{n\in\mathbb{N}} X_n$

2.Riemann-Lebesque 定理

设 g 连续, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\int g(x)cos(nx)dx = 0$$

3.$\pi-\lambda$ 定理的运用

P 为概率测度, B 为 Borel 集, 对任意 $\epsilon>0$, 证明存在开区间的并 A 使得

$$P(A\Delta B) < \epsilon$$

4. 可测映射的性质

X 为 Ω 到 Ω 的可测映射, $\mathscr{A}$ 为 Ω 上的代数, 证明

$$X^{-1}(\sigma(\mathscr{A})) = \sigma(X^{-1}(\mathscr{A}))$$

5. 分布函数

(1)P 为概率测度,A 为零测集, 证明对任意的随机变量 X 有

$$\mathbb{E}(X\mathbb{I}_A) = 0$$

(2)$X_1,...,X_n$ 为独立同分布的随机变量, 拥有相同且连续的分布 F, π 为 1 到 n 的一个置换, 证明

$$(X_1,...,X_n) \overset{d}{=} (X_{\pi(1)},...,X_{\pi(n)})$$

6.Fubini 定理的应用

(1) 证明 （假设了独立性）

$$\mathbb{E}(\prod_{i=1}^{n} X_i) = \prod_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i)$$

(2) 对分布函数 F, 证明

$$\int F(x+a) - F(x)dx = a$$