2022 年中科大入学考试真题（回忆版）

满分：100 分，考试时间 120 分钟。须写出必要的计算和证明过程，结果需简化。禁止使用手机、计算机等电子设备。

1. （10 分）设$\theta=100^{\circ}$，求$P=(\sin\theta+\cos\theta)(1-4\sin\theta\cos\theta)$的值。

2. （10 分）袋中共有$m+n$个小球，m个红球，n个蓝球，除了颜色之外完全相同。每次从袋中随机取出一个小球，若为红球则放回袋中；若为蓝球则不放回，直至取出所有蓝球。求取球次数的数学期望。

3. （20 分）设映射$f:N\to R$满足：

$f(1)=2$，$f(m+n)=\frac{1}{2}f(2n)+2f(m)-f(m-n)-n\quad\forall m\geq n$。求$f(2022)$值。

4. （20 分）设点A是圆C_1的圆心，线段AB是圆C_2的直径，圆C_1C_2相交于E、F两点，点G是线段EF的中点，点H是G关于A的对称点，线段BH是圆C_3的直径，圆C_1、C_3相交于P、Q两点。证明：线段PQ是C_1的直径。

5. （20 分）设a、b、c都是正数且$a+b+c=1$，求$S=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{a^2+c^2}+\frac{1}{b^2+c^2}$的取值范围。

6. （20 分）设$\alpha_1,\cdots,\alpha_5$是R^3中任意 5 个非零向量，证明：必存在非零向量$\beta\in R^3$，它与$\alpha_1,\cdots,\alpha_5$中至多一个向量的夹角是钝角。

2022 年中科大入学考试答案解析（数学）

1. 令 $\alpha=\theta+\frac{\pi}{4}$ 有 $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\alpha$，

$$2\sin\theta\cos\theta=(\sin\theta+\cos\theta)^2-1=\left(\sqrt{2}\sin\alpha\right)^2-1=2\sin^2\alpha-1$$

$$\therefore p=\sqrt{2}\sin\alpha\left(1-2\left(2\sin^2\alpha-1\right)\right)$$

$$=\sqrt{2}\sin\alpha\left(3-4\sin^2\alpha\right)=\sqrt{2}\left(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha\right)=\sqrt{2}\sin 3\alpha=\sqrt{2}\sin 75^\circ$$

$$=\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

2. 先证引理 1，在袋中有 x 个红球，y 个篮球，取到红球放回，直到取到一个蓝球才结束，

则结束时取球次数的期望为 $\frac{x+y}{y}$。

设期望为 E，则第一次取球有 2 种可能：（1）为蓝球，步数为 1，概率为 $\frac{y}{x+y}$；

（2）为红球，概率为 $\frac{x}{x+y}$，第一步白走。

故 $E=1\cdot\frac{y}{x+y}+(E+1)\cdot\frac{x}{x+y}\Rightarrow E=\frac{x+y}{y}$

应用上述引理，第一个蓝球为 $\frac{m+n}{n}$，第二个为 $\frac{m+n-1}{n-1}\cdots$

故 $E=\frac{m+n}{n}+\frac{m+n-1}{n-1}+\cdots+\frac{m+1}{1}=n+m\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\cdots+1\right)$

3. 令$m=n=0$有$f(0)=\frac{1}{2}f(0)+2f(0)-f(0)\Rightarrow f(0)=0$

令$m=n=x$有$f(2x)=\frac{1}{2}f(2x)+2f(x)-f(0)-x$

$f(2x)=4f(x)-2x$ ①　　$f(2)=4\cdot f(1)-2=6$

令$m=x+2$，$n=x$有$f(2x+2)=\frac{1}{2}f(2x)+2f(x+2)-f(2)-x$　应用① 有

$4f(x+1)-2(x+1)=[2f(x)-x]+2f(x+2)-6-x$

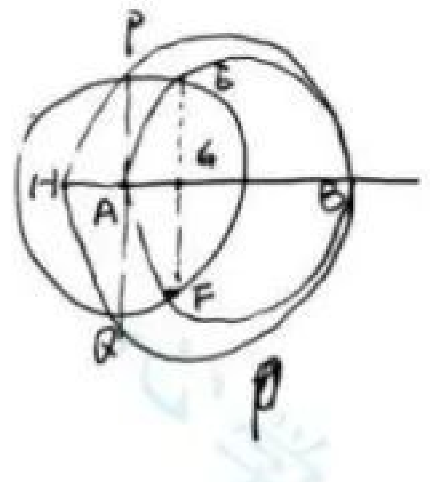
$4f(x+1)=2f(x)+2f(x+2)-4$

$\therefore f(x+2)-f(x+1)=f(x+1)-f(x)+2$　　由$f(1)-f(0)=2$可知

$f(x+1)-f(x)=2(x+1)$　　$\therefore f(2022)=2+4+6\cdots+4044=4090506$

4. $\because AB$为直径，$\therefore\angle AEB=90^\circ$ 且$AB\perp EF$，$\therefore AE^2=AG\cdot AB$

$\therefore AP^2=AG\cdot GB=AH\cdot AB$　过 A 作 AB 的垂线交$\odot C$于P',Q'，则$(AP')^2=(AP)^2=AH\cdot AB$且$AP'\perp BA$　$\therefore\Delta HAP'\sim\Delta P'AB\Rightarrow\angle HP'B=90^\circ$，$\therefore P'$在$\odot C_3$上。同理$Q'$在$\odot C_3$上而$\odot C_1$与$\odot C_3$只存在2个交点$P,Q$，$\therefore PQ$即为$P'Q'$，$\therefore PQ$为直径。



5. 不妨令 $a \ge b \ge c$

$$\frac{1}{a^2+c^2}+\frac{1}{b^2+c^2} \ge \frac{2}{ab+c^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(ab+c^2\right)-\left(a^2+c^2\right)}{a^2+c^2}+\frac{\left(ab+c^2\right)-\left(b^2+c^2\right)}{b^2+c^2} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{b(a-b)}{b^2+c^2} \ge \frac{a(a-b)}{a^2+c^2}$$

$\Leftrightarrow b\left(a^2+c^2\right) \ge a\left(b^2+c^2\right) \Leftrightarrow ab(a-b) \ge (a-b)c^2$ 成立

$$\therefore \frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2} \ge \frac{1}{a^2+b^2}+\frac{2}{ab+c^2} > \frac{1}{a^2+(b+c)^2}+\frac{2}{a(b+c)}$$

$$=\frac{1}{a^2+(1-a)^2}+\frac{2}{a(1-a)}=\frac{1}{1-2t}+\frac{2}{t}\left(t=a(1-a)\in\left(0,\frac{1}{4}\right]\right)=\frac{2-3t}{(1-2t)t} \ge 10$$

故 $\sum \frac{1}{a^2+b^2} > 10$。

所以范围为 $(10,+\infty)$。

6. 对 $\overrightarrow{a_1}\overrightarrow{a_2}$ 取一个 $\vec{n}$ 使 $\vec{n}\cdot\overrightarrow{a_1}=0, \vec{n}\cdot\overrightarrow{a_2}=0$，考察 $\vec{n}\cdot\overrightarrow{a_3}, \vec{n}\cdot\overrightarrow{a_4}, \vec{n}\cdot\overrightarrow{a_5}$ 这 3 个数，可为正数，负数，零。若负数的个数 ≤ 1，则 $\vec{n}$ 与 $\overrightarrow{a_1} \sim \overrightarrow{a_5}$ 中至多一个向量的夹角为钝角，证毕。

若负数的个数 ≥ 2，则正数的个数 ≤ 1，则考虑 $\vec{m}=-\vec{n}, \vec{m}\cdot\overrightarrow{a_3}, \vec{m}\cdot\overrightarrow{a_4}, \vec{m}\cdot\overrightarrow{a_5}$ 中负数的个数 ≤ 1，则仍然存在一个向量符合题中要求，证毕。