2022 年春代数几何进阶期末试题

习题 1. *1.* 设 X 为零维 *Noether* 概形，证明：$X=\{x_1,\cdots,x_n\}$ 为有限集合，且其上的拓扑为离散拓扑。

2. X 同上，证明：$\mathcal{O}_X(X)\simeq\oplus_{i=1}^n\mathcal{O}_{X,x_i}$.

3. 设 A 为零维 *Noether* 环，其素理想为 $P_1,\cdots,P_n$. 证明：$A\simeq\oplus_{i=1}^n A_{P_i}$.

习题 2. 设 $C\simeq V_+(x^2+y^2+z^2)$ 为 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Z}}$ 的闭子概形. 试写出 C 上的两个闭点 x_1,x_2, 使得态射 $C\to\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ 在 x_1 处光滑，在 x_2 处不光滑. 简要说明你的理由.

习题 3. 设 A 为整环，K 为其分式域, 设 $x_0\in X:=\operatorname{Spec}A$. 令 $\mathcal{F}$ 为 X 上如下定义的层：

$$\mathcal{F}(U)=\begin{cases}K, \text{若 } x_0\in U;\\ 0, \text{若 } x_0\notin U.\end{cases}$$

$\mathcal{F}$ 以自然的方式看作 $\mathcal{O}_X$-模层. 当 x_0 满足什么条件时 $\mathcal{F}$ 为拟凝聚的 (*quasi-coherent*) ?

习题 4. 设 k 为域. 本题的目标是确定 $\mathbb{A}^n_k$ 和 $\mathbb{P}^n_k$ 的仿射开子集.

1. 证明 $\mathbb{A}^n_k$ 和 $\mathbb{P}^n_k$ 的主开集 (不等于 $\mathbb{P}^n_k$) 均为仿射的.

2. 设 $X=\cup_i^m D(f_i)$ 为 $\mathbb{A}^n_k$ 的有限个主开集之并. 证明 $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_k}(X)=k[T_1,\ldots,T_n]_f$, 其中 $f=\gcd\{f_i\}_i$. 进而证明 $\mathbb{A}^n_k$ 的仿射开子集均为主开集.

3. 证明 $\mathbb{P}_k^n$ 的维数为 $n-1$ 的不可约闭子集均为超曲面，即形如 $V_+(F)$，F 为齐次多项式.

4. 设 X 为 $\mathbb{P}_k^n$ 的仿射开子集. 证明 $\mathbb{P}_k^n \backslash X$ 的每个不可约分支均为 $n-1$ 维的，进而证明 X 为 $\mathbb{P}_k^n$ 的主开集.

习题 5. 设 $n \geq 2$ 为正整数，$N := n^2 - 1$. 令 $\mathbb{A}^N := Spec\ \mathbb{Z}[x_1, \cdots, x_N]$ 为 N 维仿射空间，$SL_n := Spec\ \mathbb{Z}[\{x_{i,j}\}_{1\leq i,j\leq n},$ [redacted] $/($ [redacted] $det(x_{i,j}) - 1)$ 为 n 阶特殊线性群概形.

1. 证明存在 $SL_n(\mathbb{F}_p) := Mor(Spec\ \mathbb{F}_p, SL_n)$ 与 $\mathbb{F}_p$ 上 n 阶特殊线性群 (即 $\mathbb{F}_p$ 上行列式为 1 的 $n \times n$ 方阵形成的群) 之间的双射.

2. 证明对几乎所有的素数 p, $\#SL_n(\mathbb{F}_p) \neq \#\mathbb{A}^N(\mathbb{F}_p)$, 其中 $\#S$ 代表集合 S 中的元素个数.

3. 证明: 如果存在概形同构 $SL_n \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \mathbb{A}^N \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, 那么存在正整数 $M \neq 1$ 使得 $SL_n \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/M] \cong \mathbb{A}^N \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/M]$.

4. 证明 $SL_n \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ 与 $\mathbb{A}^N \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ 作为概形不同构.

习题 6. 设 k 为代数封闭域，C 为 k 上的不可约射影曲线 (即 $C \to \mathrm{Spec}\ k$ 为射影 (*projective*) 态射，且 C 为不可约的一维概形)，X 为分离的 (*seperated*) k-概形。设 $f : C \to X$ 为 k-概形态射，并且 f 不是常值态射（即 f 的像不是一个点）。我们的目标是证明 f 为仿射态射（*affine morphism*）.

1. 证明 f 为闭映射.

2. 证明 f 的每个纤维均为有限集.

3. 设 Z 为 C 的有限子集，证明：存在 Z 在 C 中的开领域 W，存在 $z_1, z_2 \in Z$，以及 $g \in \mathcal{O}_C(W)$，使得 $g(z_1) = 0$, $g(z_2) \neq 0$.

提示：利用 $C \subset \mathbb{P}_k^n$.

4. 设 U 为 X 的仿射开子集，令 $V := \operatorname{Spec} f_*\mathcal{O}_C(U)$. 证明：$f|_{f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \to U$ 等于以下复合态射：

$$f^{-1}(U) \to V \to U.$$

将态射 $f^{-1}(U) \to V$ 记为 g. 证明 g 诱导层的同构：$\mathcal{O}_V \xrightarrow{\sim} g_*\mathcal{O}_{f^{-1}(U)}$.

5. 证明 $f^{-1}(U) \to V$ 为同构，进而证明 f 为仿射态射.