中国科学技术大学
2022 年秋季学期微分方程 I 期末试卷

(B 卷)

姓名：________________ 学号：________________

注意：1. 计算题只写结果不写过程，不给分. 所有题目中使用的定理或者命题需要注明.
2. 必须用题目指定的方法计算或者证明，否则不得分.

1. (20 分) 利用分离变量法求解方程

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = Ax, & 0 < x < l \\ u(x,0) = 0, & 0 \le x \le l \\ u(0,t) = 0, \ u(l,t) = Bt, & t \ge 0, \end{cases}$$

其中，A, B 是常数.

2. 如果已知 (形式上) 有如下关系

$$u(0,t)=0,\ u(l,t)=Bt,\quad t\geq 0,$$

其中，A, B 是常数.

2. 如果已知 (形式上) 有如下关系

$$\left(e^{-i4\pi^2|\xi|^2t}\right)^{\vee}(x)=\frac{1}{(4i\pi t)^{n/2}}e^{-i\frac{|x|^2}{4t}},\quad \xi,x\in\mathbb{R}^n,$$

其中 $i=\sqrt{-1}$ 表示虚数单位.

(a) (10 分) 用 Fourier 变换方法求解薛定谔方程的解

$$\begin{cases} i\partial_t u+\Delta u=0, & x\in\mathbb{R}^n \\ u(x,0)=f(x). \end{cases}$$

(这里 $u:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\mapsto\mathbb{C}$ 是一个取值为复数的函数.)

(b) (10 分) 薛定谔方程是否具有有限传播速度? 当时间 $t\to+\infty$ 时，$u(x,t)$ 会怎样? 回答并简要说明理由.

3. (15 分) 令 $\mathbb{R}^2_+$ 表示上半平面, 用格林函数法求解边值问题

$$\begin{cases} \Delta u=0, & (x,y)\in\mathbb{R}^2_+ \\ u(x,0)=f(x). \end{cases}$$

4. (15 分) 令 B 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的球 $B_R(x_0)$. 设 $u\in C^1(\bar{B})\cap C^2(B)$ 是调和的，证明:

$$|Du(x_0)|\leq\frac{n}{R}\max_{\bar{B}}|u|.$$

5. (15 分) 用极大值原理证明：热传导方程

$$\begin{cases}\partial_t u - \partial_x^2 u - 2\partial_x u - 2u = 0, \quad 0 < x < l, 0 < t \le T,\\ u(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) + u(l,t) = 0, \quad 0 \le t \le T,\\ u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le l.\end{cases}$$

的古典解只有零解.

(提示: 考虑函数 $v = e^{-\lambda t}u(x,t)$, 其中 λ 需要选取.)

6. 设 $u(x,t)$ 是自由波动方程

$$\begin{cases}\partial_t^2 u - \Delta u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n\\ u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x).\end{cases}$$

的解. 其中 $f(x)$, $g(x)$ 是光滑函数，并且在以原点为中心半径为 R 的球 B_R 外恒为零.

(a) (10 分) 定义

$$M(t) = \int_{\mathbb{R}^n} x \cdot \nabla u(x,t)\partial_t u(x,t)dx.$$

证明: 对于任意的时间 $t \ge 0$, 存在 $C = C(R, t, \|\nabla f\|_2, \|g\|_2)$ (即 C 与 $R, t, \|\nabla f\|_2, \|g\|_2$ 有关)，使得 $|M(t)| < C(R, t, \|\nabla f\|_2, \|g\|_2) < +\infty$.

$$f(x), \quad u_t(x,0) = g(x).$$

的解. 其中 $f(x), g(x)$ 是光滑函数，并且在以原点为中心半径为 R 的球 B_R 外恒为零.

(a) (10 分) 定义

$$M(t) = \int_{\mathbb{R}^n} x \cdot \nabla u(x,t) \partial_t u(x,t) dx.$$

证明: 对于任意的时间 $t \geq 0$, 存在 $C = C(R, t, \|\nabla f\|_2, \|g\|_2)$ (即 C 与 $R, t, \|\nabla f\|_2, \|g\|_2$ 有关)，使得 $|M(t)| < C(R, t, \|\nabla f\|_2, \|g\|_2) < +\infty$.

(b) (10 分) 证明:

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{n}{2} \int_{\mathbb{R}^n} u_t^2 dx + (\frac{n}{2} - 1) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx.$$

一些可能用到的事实:

1. Fourier 变换及逆变换:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx, \quad \check{g}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi.$$

2. 在第 6 题中,

$$\|\nabla f\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(\nabla f)(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|g\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$