中国科学技术大学数学科学学院

2022～2023 学年第一学期期末考试试卷

■A 卷　　□B 卷

课程名称　微分方程 I　　　课程编号　MATH3012.02

考试时间　2023.2.22　　　考试形式　闭卷

姓　名＿＿＿＿＿＿　学　号＿＿＿＿＿＿　学　院＿＿＿＿＿＿

题　号	1	2	3	4	5	6	7	8	总　分
得　分									

1. 填空题（每小题 5 分，共 30 分）

(1) 二阶偏微分方程 $u_{xx}-2u_{xy}+u_{yy}=0$ 的类型是＿＿＿＿＿＿，其通解是＿＿＿＿＿＿＿。

(2) 二维波动方程初值问题 $u_{tt}=u_{xx}+u_{yy}$，$u|_{t=0}=x^2(x+y), u_t|_{t=0}=0$ 的解

$u(x,y,t)=$＿＿＿＿＿＿＿＿。

(3) 热方程初边值问题 $u_t=u_{xx}$，$-1<x<1, t>0$; $u|_{t=0}=x^2, u|_{x=-1}=\cos t, u|_{x=1}=e^{-t}$ 的解 $u(x,t)$ 的

小值是＿＿＿＿＿＿。

$=3(x^2-y^2)+1$ 的调和函数的最大值

(4) 在三维单位球内调和且在球面上满足$u(x,y,z)=3(x^2-y^2)+1$的调和函数的最大值是__________。

(5) 二维 Laplace 算子特征值问题$-\Delta u=\lambda u, x\in D=(0,1)\times(0,1); u|_{\partial D}=0$的最小特征值是 __________。

(6) 将非线性方程$u_t+uu_x=u_{xx}$化为线性热方程$v_t=v_{xx}$的一种变换是__________。

2. （10 分）求解一维波动方程初边值问题$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}-t^2\sin(2\pi x),\ 0<x<1,\ t>0 \\ u|_{t=0}=u_t|_{t=0}=0 \\ u|_{x=0}=u|_{x=1}=0 \end{cases}$。

3. （10 分）设区域$D\subset\mathbb{R}^3$有界,$\sigma(x)\geq 0$，证明：三维波动方程初值边问题

$$\begin{cases} u_{tt}=\Delta u,\ x\in D,\ t>0 \\ u|_{t=0}=\varphi(x), u_t|_{t=0}=\psi(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}+\sigma(x)\dfrac{\partial u}{\partial t}=0 \text{ on } \partial D \end{cases}$$

的经典解至多有一个。

4. （10 分）证明：若常数$c<\pi$，函数$\varphi(x)$光滑，则一维热方程初边值问题

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + cu,\ 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0 \end{cases}$$ 的解满足 $\lim\limits_{t\to+\infty} u(x,t) = 0$。

5. （10 分）用 Fourier 变换求解热方程初值问题 $\begin{cases} u_t = u_{xx} + u_x + u + f(x,t),\ x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$。

6. （10 分）设区域 $D \subset \mathbb{R}^n (n \ge 2)$ 有界，$u(x) \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ 是

$\begin{cases} \Delta u + u - u^3 = 0,\ x \in D \\ u|_{\partial D} = h(x) \end{cases}$ 的一个解，证明：若 $\max\limits_{\partial D} |h(x)| \le 1$，则 $|u(x)| \le 1, x \in D$。

7. （10 分）设区域 $D \subset \mathbb{R}^n (n \ge 2)$ 有界，$u(x) \in C^2(D)$。

证明：$-\Delta u \ge 0$ 在 D 中成立当且仅当对任意的球 $B_r(x) \subset D$ 有

$$u(x) \ge \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x)} u(y) dy.$$

8. （10 分）请找出区域 $D = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1, x_2, x_3 > 0\}$ 的 Green 函数 $G(x, y)$

以及边值问题 $\begin{cases} \Delta u = 1,\ x \in D \\ u|_{\partial D} = 1 \end{cases}$ 的解 $u(x)$。

边值问题 $\begin{cases} \\ u|_{\partial D}=1 \end{cases}$ 的解 $u(x)$。

参考公式：

1)Laplace 算子的极坐标形式：$\Delta_2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$，

$$\Delta_3 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

2）Green 第一公式：$\int_D v\Delta u dx = \int_{\partial D} v\frac{\partial u}{\partial \nu}dS - \int_D \nabla v\cdot\nabla u dx$； n 维热核 $S(x,t) = \frac{1}{(4\pi kt)^{n/2}}e^{-\frac{|x|^2}{4kt}}$

3）调和方程基本解：$V(x-y) = \frac{1}{2\pi}\ln|x-y|\ (n=2)$, $V(x-y) = -\frac{1}{4\pi|x-y|}\ (n=3)$

4）三维波动方程 Kirchhoff 公式：$x\in\mathbb{R}^3$, $t>0$

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{S_{ct}(x)}\psi(y)dS(y) + \frac{1}{4\pi c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{S_{ct}(x)}\frac{\varphi(y)}{t}dS(y)$$

5）Poisson 公式：$u(x) = \int_D G(x,y)f(y)dy + \int_{\partial D}\varphi(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu}dS(y)$

6）$\mathbb{R}^n$ 中 Fourier 变换与逆变换：

$$\mathrm{F}[f](\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\cdot\xi}dx,\quad \mathrm{F}^{-1}[g](x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} g(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi$$