中国科学技术大学

2022−2023学年第一学期期末考试试卷

考试科目：数学分析A1　　　　得分：

学生所在系：　　　　姓名：　　　　学号：

注意事项:

1.答卷前, 考生务必将姓名、学号等填写清楚.

2.本考试为闭卷考试, 共八道大题, 总分100分, 考试时间120分钟.

3.解答请写在试题后的空白处, 若写不下, 可写在试题的背面, **写在草稿纸上无效.**

2023年2月24日

一、(10分)

得分	

设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有连续的导数且有反函数$f^{-1}(x)$, 已知$f(x)$有原函数$F(x)$, 求$\int f^{-1}(x)dx$.

二、(10分)

得分	

设多项式$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$, 且满足$a_0\neq 0$, $f^{(k)}(x_0)\geq 0$, $(k=0,1,2,\cdots,n)$, 证明：$f(x)$在$(x_0,+\infty)$上无零点.

得分	

三、(10分)

设$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续, 并且$f\geq 0$, 如果$\int_0^{+\infty} f(x)dx=0$

证明：$f(x)\equiv 0$.

四、(10分)

得分	

设$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续，并恒取正值. 证明：$\varphi(x)=\dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$是$(0,+\infty)$上的严格递增函数.

五、(10分)

得分	

设$f(x)$在$[a,b]$上连续, 在(a,b)上有二阶导数, 如果$|\ f''\ |$在(a,b)上的上界为M, 证明：对任意$x,y\in[a,b]$, 有

$$\left|f(\frac{x+y}{2})-\frac{f(x)+f(y)}{2}\right|\le\frac{M}{8}(x-y)^2\ .$$

六、(10分)

得分	

设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，并且对任一满足$\int_a^b g(x)dx=0$的连续函数$g(x)$，都有$\int_a^b f(x)g(x)dx=0$，证明：$f(x)$ 是常值函数.

得分	

七、(20分)

设$f(x)$在$[a,b]$上单调且有连续的导数, 令$S(t)=\int_a^b |f(x)-f(t)|dx$,

求$S(t)$在$[a,b]$上的最小值点和最小值.

八、(20分)

得分	

设函数$f(x)$在$[a,b]$上有连续的导数，且$f(a)=0$.

(1) 证明：$\int_a^b f^2(x)dx \le \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b (f'(x))^2 dx$.

(2) 证明：$\int_a^b f^2(x)dx \le \frac{1}{2}\int_a^b (b+x-2a)(b-x)(f'(x))^2 dx$.

$((b-a)+(x-a))((b-a)-(x-a))$

$$\int_a^b \left(\int_a^x (f'(t))^2 dt\right)\left(\int_a^x 1 dt\right) dx$$

$$= \int_a^b (x-a) \int_a^x (f'(t))^2 dt\, dx$$

$$= \frac{1}{2}(x-a)^2\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b \frac{1}{2}(x-a)^2 (f'(x))^2 dx \quad \#$$