# 2022 春调和分析

授课教师：郭经纬 时间：2 小时

1. 设$1 \le p < \infty, f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. 证明:

$$\lim_{h\to\infty} \|f(\cdot + h) + f\|_p = 2^{\frac{1}{p}}\|f\|_p$$

2. 设$f \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$,证明:

$$\int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 |f|^2 dx \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^2 \left|\hat{f}\right|^2 d\xi \ge \frac{d^2}{4\pi^2}$$

3. 证明：Stein-Tomas 限制性定理

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})} \le C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), 1 \le p \le \frac{2n+2}{n+3}$$

中的范围$p \le \frac{2n+2}{n+3}$是最佳的。

4. 设$m$可测，证明：$m$是$L^2(\mathbb{R}^d)$上的乘子当且仅当$m \in L^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$.

5. 设$\Omega \in L^p(\mathbb{S}^{n-1})$,令

$$K = \frac{\Omega\left(\frac{x}{|x|}\right)}{|x|^n}\chi_{[1,2]}(|x|)$$

证明：$\forall 0 < a < \frac{1}{p'}$，有

$$\left|\widehat{K}(\xi)\right| \le C|\xi|^{-a}$$

来自默题者的 hint：最后一题化为极坐标，把对角度的积分先留着，对半径的积分考虑震荡积分。