

中国科学技术大学
2022-2023学年泛函分析期中考试

姓名: _____ 学号: _____

1. (15分) 有限维赋范线性空间是否一定是 Banach 空间? 证明或者举反例说明你的结论.
2. (15分) 证明或否定: 无穷维的 Banach 空间中的非空紧集没有内点.
3. (15分) 设 M 是 Hilbert 空间 X 的一个子集. 证明:

$$(M^\perp)^\perp = \overline{\text{span}M}.$$

4. (15分) 设 X 是一个 Hilbert 空间, $T: X \rightarrow X$ 是一个线性算子, 满足

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle, \quad \forall x, y \in X.$$

证明: T 是有界算子.

5. (15分) 设 H 是 Hilbert 空间, $A \in \mathcal{L}(H)$, 并且存在 $m > 0$, 使得

$$|\langle Ax, x \rangle| \geq m\|x\|^2, \quad \forall x \in H.$$

证明: A^{-1} 存在且 $A^{-1} \in \mathcal{L}(H)$.

6. (15分) 设 $1 < p = \frac{q}{q-1} < \infty$. 证明: 若对任意的 $f \in L^p(0, 1)$ 都有 $fg \in L^1(0, 1)$, 则 $g \in L^q(0, 1)$.

7. (10分) 证明: Banach 空间不可能有可数无穷的代数基.