装订线 答题时不要超过此线

中国科学技术大学
2022–2023学年泛函分析期末考试

姓名：____________ 学号：____________

题号	1	2	3	4	5	6	总分
得分							

注意：除定理公式所涉及的人名之外，请使用**中文**。

两道题目之间是相互独立的。答题中后面的问题可以使用前面问题的结论，无论答题人是否已经得到正确的证明或答案。

请在试卷上答题。如试卷上答题空间不足，可将答案写在专门的空白纸（作为答题纸）上，但应标明题号，并注明姓名和学号。

考试结束时，请交试卷和答题纸，草稿纸不用交。考试过程中，如有不明确之处，请先举手示意再提问，切勿喧哗！

1. （10分）叙述自反空间的定义，并举出一个可分、无穷维非Hilbert空间的自反空间的例子，不需要证明。

2. （10分）设$\mathscr{X}$和$\mathscr{Y}$是赋范线性空间，$\mathscr{X}\neq\{0\}$，且$\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$是Banach空间。求证：$\mathscr{Y}$是Banach空间。

3. （10分）设$\mathscr{X}$是Banach空间，$A\in\mathfrak{C}(\mathscr{X})$。求证：$I-A$为单射当且仅当$I-A$为满射。

4. （15分）设$1<p<\infty$，并且$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$。若$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$是一个复数序列，满足：对任意$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\in\ell^p$，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx_n$收敛。求证：$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\in\ell^q$。

5. （15分）设$\mathscr{H}$是Hilbert空间，序列$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$构成$\mathscr{H}$中的规范正交集。求证：$e_n\rightharpoonup 0(n\to\infty)$。

6. 设$T: L^2[0,1] \to L^2[0,1]$是如下定义的线性算子

$$Tx(t) = \int_0^t x(s)\,\mathrm{d}s, \quad x \in L^2[0,1].$$

(i) （10分）对$n \geq 1$，设T^n为T自身复合n次得到的算子，求证：

$$T^n x(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} x(s)\,\mathrm{d}s.$$

(ii) （10分）求谱半径$r_\sigma(T)$。

(iii) （15分）求$\sigma_p(T), \sigma_c(T), \sigma_r(T)$。

(iv) （5分）求证：T是紧算子。

(v) （10分，附加题）T是否为对称算子？请详细说明理由。