中国科学技术大学期末试卷

2022年秋季学期 A 卷

课程名称	代数拓扑	课程编号	MATH5004P.01
授课教师	俞建青		
考试时间	2023-02-22, 19:00-21:00	考试形式	闭卷

学生姓名 ______________ 学号 ______________

题号	1	2	3	4	5	6	7		总分
得分									

1. 简答题（每小题4分）

(1) 写出Klein瓶的所有$\mathbf{Z}$系数同调群

(2) 举出一个例子：两个拓扑空间同伦等价，但是不同胚。

(3) 实射影空间$\mathbf{R}P^{2022}$ 是否可定向？简要说明理由。

(4) 举一个Abel群的短正合列的例子，要求它不是可裂(split)的。

(5) 设M是一个n维流形，那么$H_n(M, \mathbf{Z}_2) =$ ______________

(6) 设E为底流形B上秩为n的定向实向量丛，描述E的Thom类 U_E

(7) 流形上定向实向量丛E存在处处非零截面的一个拓扑障碍是

(8) 计算

$$\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}_n, \mathbf{Z}) = \_\_\_\_\_\_, \quad \mathrm{Tor}(\mathbf{Z}_n, \mathbf{Z}) = \_\_\_\_\_\_,$$
$$\mathrm{Ext}(\mathbf{Z}_n, \mathbf{Z}) = \_\_\_\_\_\_, \quad \mathrm{Tor}(\mathbf{Z}_n, \mathbf{Z}_m) = \_\_\_\_\_\_.$$

(9) 给出判定$\{U, V\}$为Mayer-Vietoris耦的两类常用条件

2. (10分) 证明：正交群$O(n)$是一般线性群$GL(n,\mathbf{R})$的强形变收缩核。

3. (10分) 将Mobius带沿着它的边界(圆圈)粘贴到环面$S^1 \times S^1$中的圆圈$S^1 \times \{x_0\}$, 其中x_0为S^1中的某固定点，所得到的空间记为X. 求X的所有$\mathbf{Z}$系数同调群。

4. (10分) 用$\langle\cdot,\cdot\rangle$表示$\mathbf{R}^{n+1}$上的标准欧氏内积。用$S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$ 表示标准球面。假定映射$f: S^n \longrightarrow S^n$连续。

证明：如果f的映射度$\deg f \neq \pm 1$, 那么函数

$$F(x) = \langle x, f(x)\rangle : S^n \longrightarrow \mathbf{R}$$

必有零点。

5. (10分) 若$k>0$, $l>0$, 证明：连续映射$f: S^{k+l} \to S^k \times S^l$ 诱导的

$$f_*: H_{k+l}(S^{k+l}) \to H_{k+l}(S^k \times S^l).$$

为平凡映射。

6. (10分) 设M是$2k$维闭可定向流形，已知$H_{k-1}(M,\mathbf{Z})$无挠，证明：$H_k(M,\mathbf{Z})$也是无挠的。

7. (14分) 设M是n维闭定向流形，$\rho_M \in H^n(M,\mathbf{Z})$为定向类。

(1) 证明：对任意的$0 \leqslant p \leqslant n$, 双线性形式

$$H^q(M,\mathbf{R}) \times H^{n-q}(M,\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R}, \quad (u,v) \longmapsto \langle u \cup v, \rho_M\rangle,$$

为非奇异的。

(2) 若$n=4k+2$, 证明：M的Euler数$\chi(M)$为偶数。