中国科学技术大学期中试卷

2020—2021 学年第 2 学期

课程名称:	拓扑学	课程编号:	00101601
考试时间:		考试形式:	闭卷
学生姓名:		学　　号:	
学　　院:		得分:	

1. （30分）判断以下命题的对错：

   (a) 闭映射为商映射。_____

   (b) 商映射为闭映射。_____

   (c) 满足$T4$公理的拓扑空间必满足$T2$公理。_____

   (d) 可分度量空间为$C2$空间。_____

   (e) 紧致度量空间是列紧的。_____

   (f) 莫比乌斯带是闭流形。_____

   (g) A为X的道路联通子集，则它的闭包$\bar{A}$道路联通。_____

   (h) 道路连通空间局部道路连通。_____

   (i) 二维球面和正方体的表面同胚。_____

   (j) 若X满足C2，T2公理，则它也满足T4公理。_____

2. (10分)设(X_1, d_1) 和(X_2, d_2)为度量空间，证明：$f : X_1 \to X_2$连续, 当且仅当对任何$x \in X_1$,任何$\epsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, 对任何$x' \in X_1$, $d_1(x', x) < \delta$, 有$d_2(f(x'), f(x)) < \epsilon$。

3. (10分)设$X \times X$的对角子集为$\Delta = \{(x, x)|x \in X\}$, 证明：$X$ 是Hausdorff空间当且仅当Δ 是闭子集。

4. (10分)设$f : S^2 \to \mathbf{E}^4$ 规定为

$$f(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz).$$

   证明：$f(S^2) \cong P^2$.

5. (20分)设$q : X \to Y$是连个拓扑空间之间的商映射，

   (a) 若Y 是连通空间，且对每个$y \in Y$，$q^{-1}(Y)$是连通空间，证明X是连通空间。

(b) 若Y 是道路连通空间，且对每个$y \in Y$，$q^{-1}(Y)$是道路连通空间，X是否为道路连通空间？若是请证明，若不是给出反例。

(c) 若q 为闭映射，Y 是紧致空间，且对每个$y \in Y$，$q^{-1}(Y)$是紧致空间，证明X是紧致空间。

6. (20分)群G是一个拓扑群，若G是满足T1公理的拓扑空间，而且映射

$$G \times G \to G, \quad (x,y) \mapsto x \cdot y, \qquad \text{和} \qquad G \to G, \quad x \mapsto x^{-1}$$

连续。

(a) 设H是一个群，同时也是满足$T1$公理的拓扑空间。证明：H 是一个拓扑群当且仅当映射

$$H \times H \to H, \quad (x,y) \mapsto x \cdot y^{-1}$$

是连续的。

(b) 证明：若G是拓扑群, 则G满足T2，T3公理。

(c) 证明：矩阵乘法运算下一般线性群$GL(n) \subset \mathbf{E}^{n\times n}$ 为拓扑群。($GL(n)$为所有非退化的$n \times n$矩阵组成的群。)